

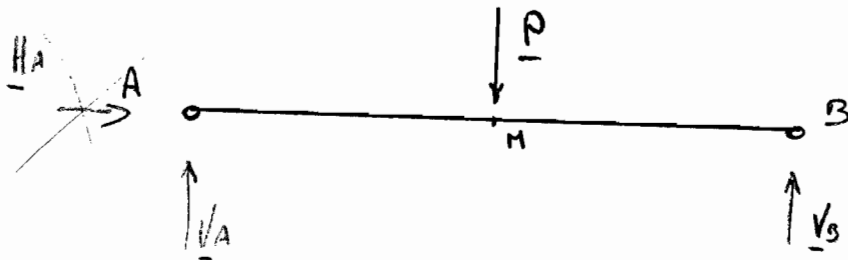
Sistema labile \rightarrow 1 grado di libertà (due carrelli)

Sistema isostatico \rightarrow il numero di gradi è pari al numero di vincoli

Sistema iperstatico \rightarrow il numero dei vincoli supera il numero dei gradi di libertà

(1) SCHEMA STATICO :

sostituisco ai vincoli le rispettive reazioni vincolari :

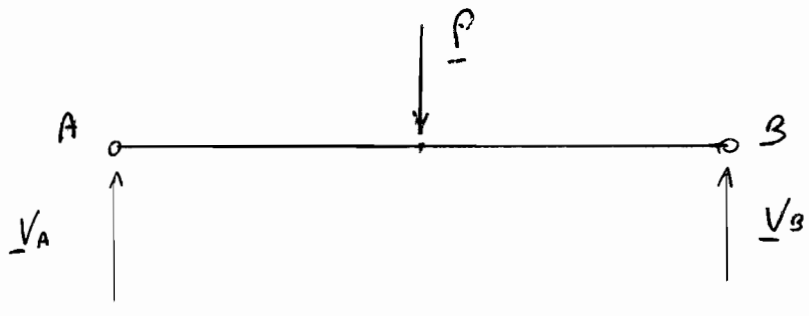


In A sostituisco una Reazione orizzontale $\underline{H_A}$ ed una verticale $\underline{V_A}$, le uniche impedita dal vincolo appoggio ;

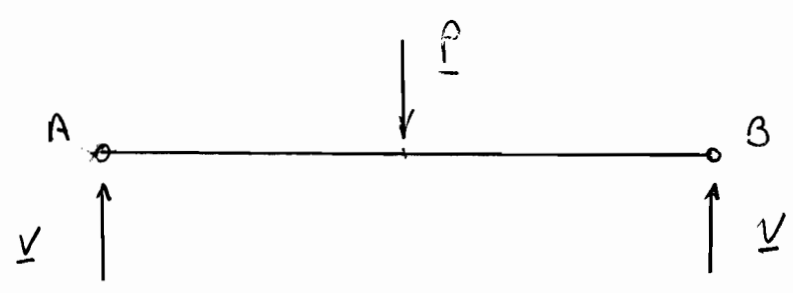
mentre in B, sostituisco solo una Reazione verticale $\underline{V_B}$, in quanto è l'unica impedita dal vincolo cerniera.

Per l'equilibrio alla traslazione verticale delle forze :

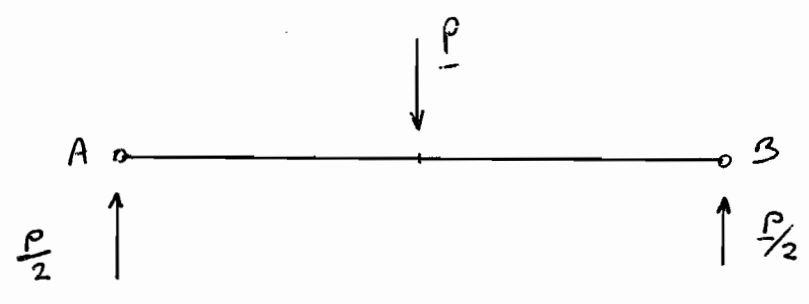
$$\underline{V_A} + \underline{V_B} = \underline{P} \quad \Rightarrow$$



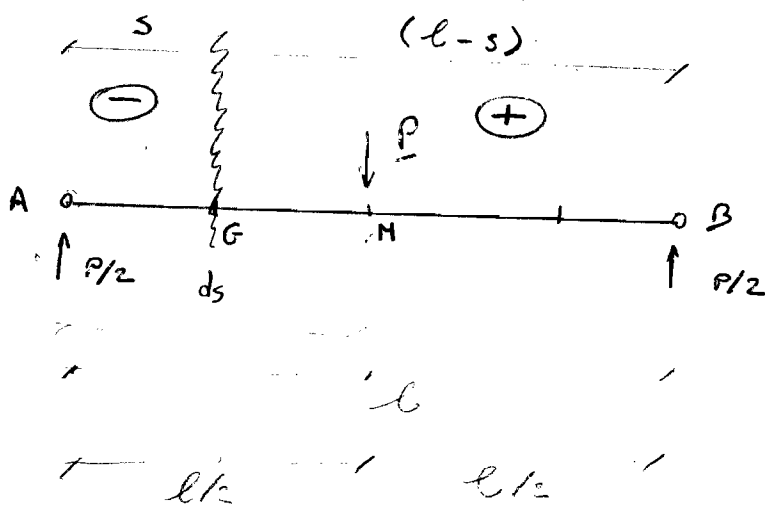
da cui essendo $V_A = V_B = V$ otteniamo =



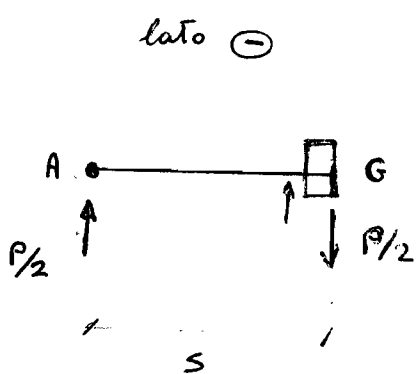
ed essendo $V + V = P \Rightarrow 2V = P \Rightarrow V = \frac{P}{2}$



Applichiamo il TEOREMA di EULERO, ossia Tagliamo la Trave AB, prima a sinistra della sezione di Messeria (lato \ominus) e poi a destra (lato \oplus), ossia:

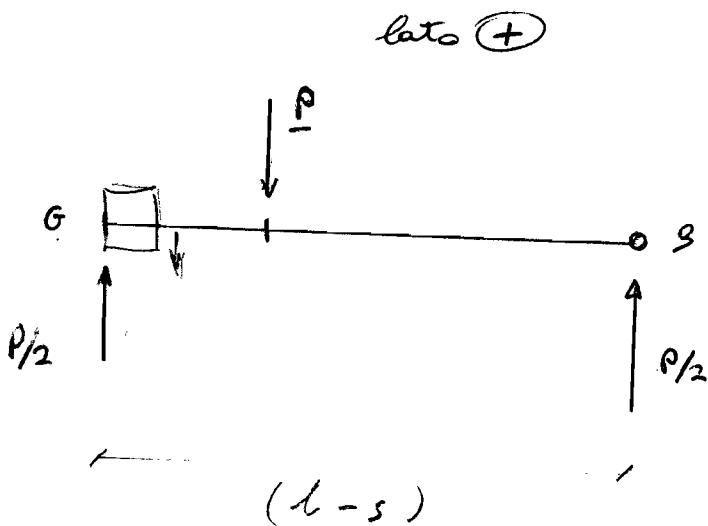


Considero prima il pezzo AG :



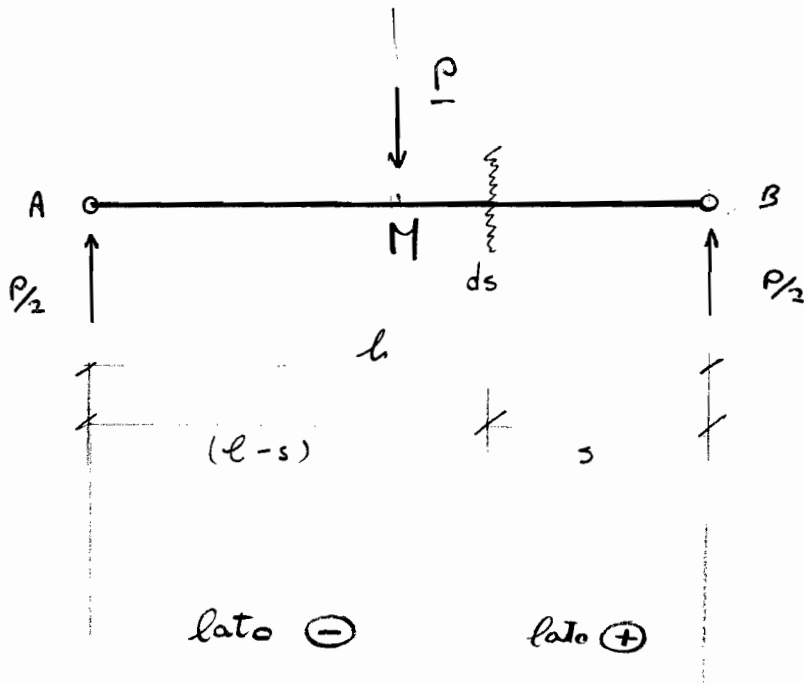
quindi a sinistra della messeria il taglio è positivo in quanto da una rotazione oraria

Considero poi il pezzo GB :



$$T = + \frac{P}{2}$$

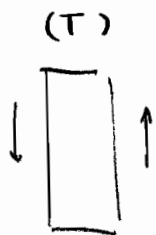
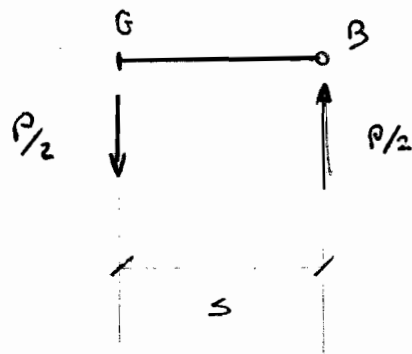
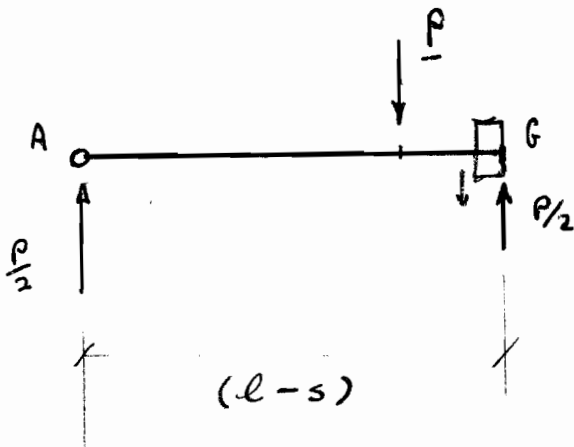
Facciamo ora un Taglio a destra della Mezzeria :



$l/2 < s \leq l$

lato \ominus

lato \oplus



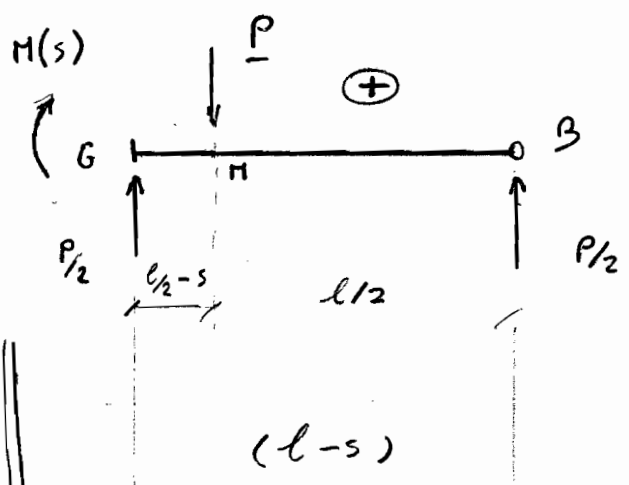
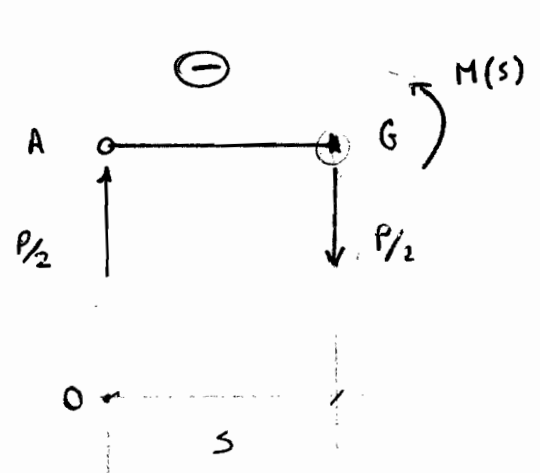
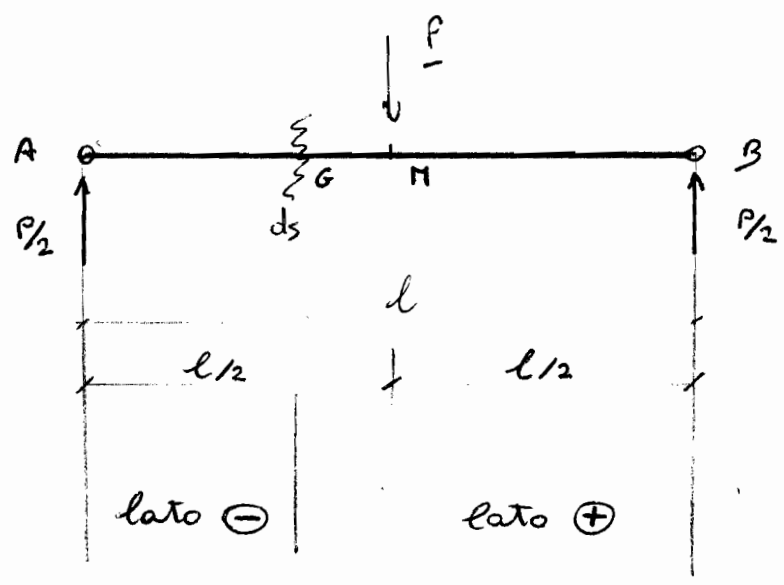
rotazione antioraria
taglio negativo

quindi a destra della Mezzeria il
Taglio è negativo $T = -\frac{P}{2}$

Analizziamo i momenti dati dalle forze nelle sezioni considerate per il Taglio:

Facciamo un Taglio a sinistra della mezzetta:

$0 \leq s \leq \frac{l}{2}$



Polo G

$$+M(s) - \frac{P}{2} \cdot s = 0 \Rightarrow M(s) = \frac{1}{2} P \cdot s$$

Quindi il momento flettente $M(s)$ è positivo con $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$ pertanto:

$$M(0) = \frac{P}{2} \cdot 0 = 0$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4} P \cdot l$$

Polo G

$$-M(s) - P \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right) + \frac{P}{2} \cdot (l - s) = 0$$

$$M(s) = \frac{P}{2}(l - s) - P \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right) = \frac{1}{2} P \cdot l - \frac{1}{2} P \cdot s - \frac{1}{2} P \cdot l + P \cdot s$$

$$M(s) = \frac{1}{2} P \cdot s$$

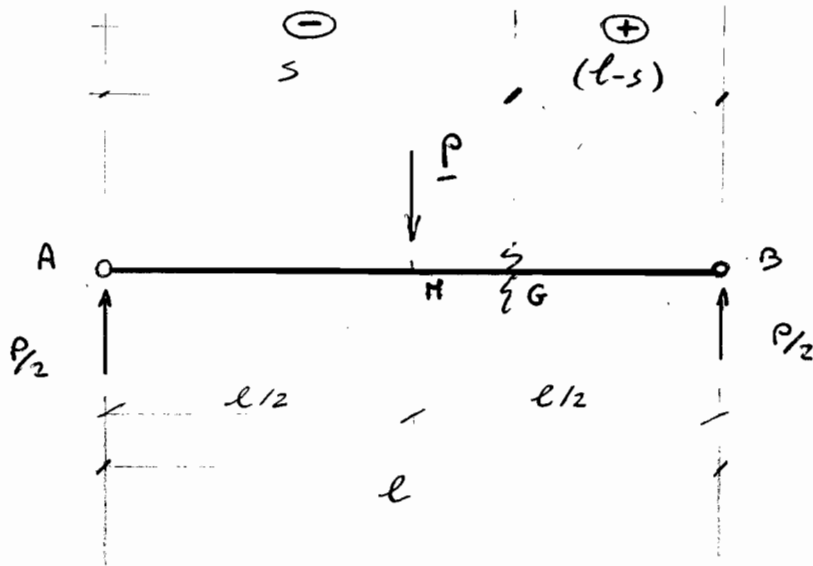
$$M(0) = 0$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{4} P \cdot l$$

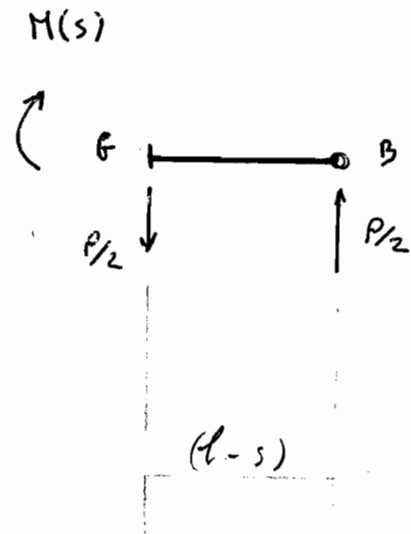
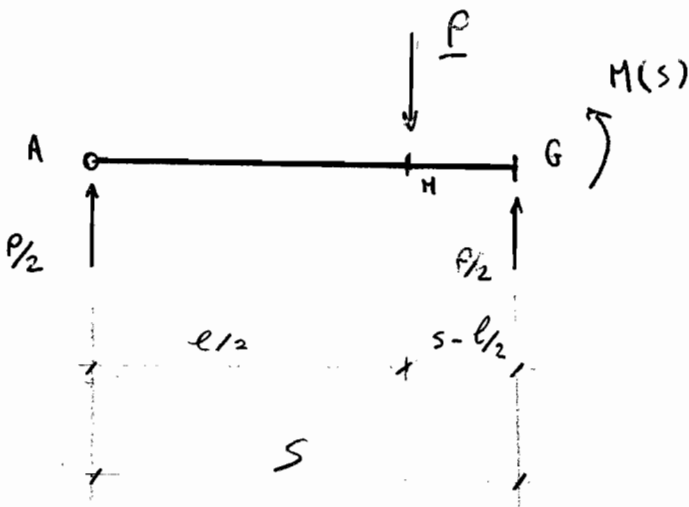
In conclusione

Facciamo un Taglio alla destra della Mezzeria :

6



$$\frac{l}{2} \leq (l-s) \leq l$$



Polo G

$$+ M(s) + P \cdot (s - \frac{l}{2}) - \frac{P}{2} \cdot s = 0$$

$$M(s) = \frac{P}{2} \cdot s - P(s - \frac{l}{2}) =$$

$$= \frac{P}{2} \cdot s - P \cdot s + \frac{P}{2} l = -\frac{1}{2} P s + \frac{1}{2} P l$$

$$M(l) = 0$$

$$M(\frac{l}{2}) = \frac{1}{4} P l$$

Polo G

$$- M(s) + \frac{P}{2} (l-s) = 0$$

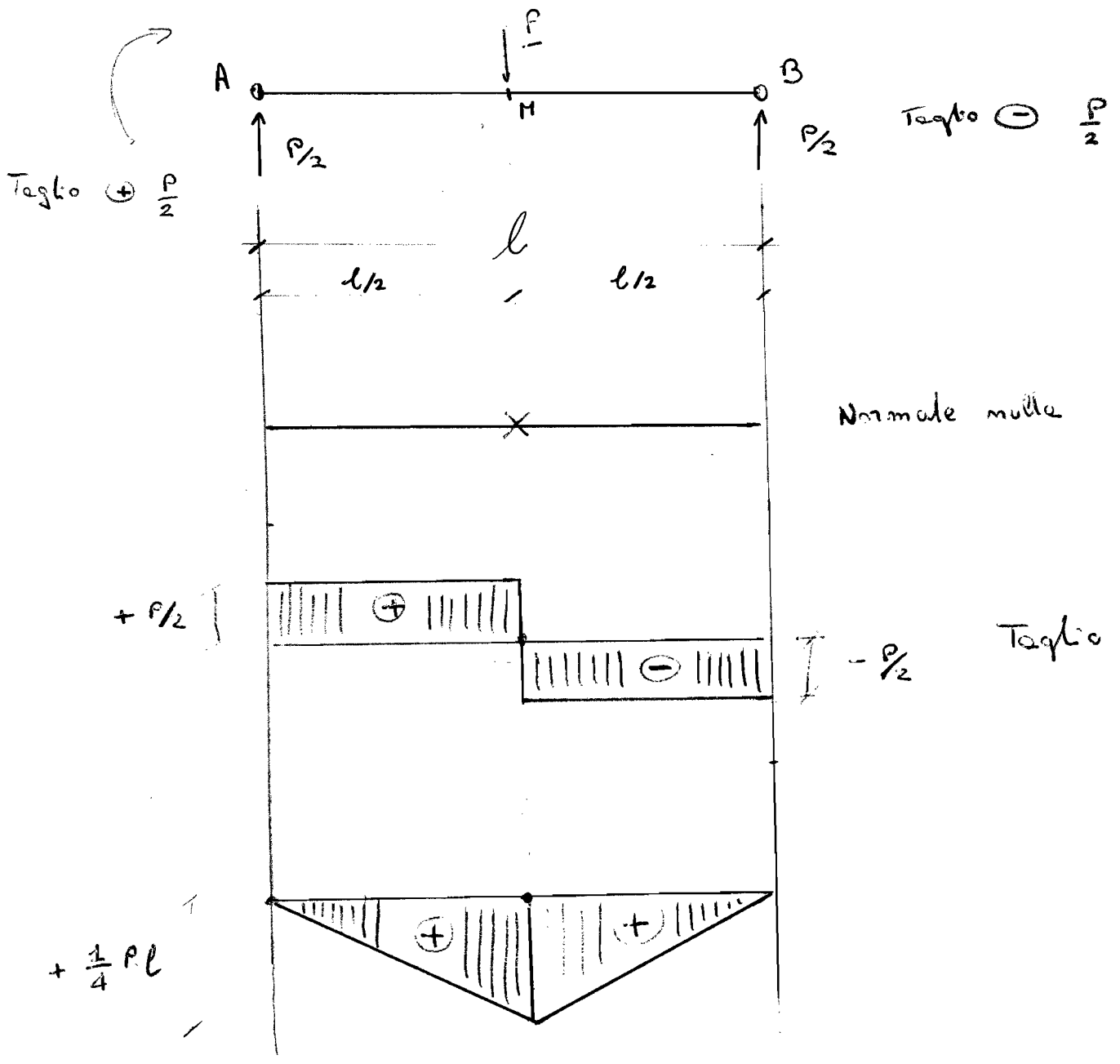
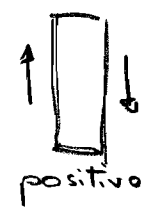
$$M(s) = \frac{1}{2} P (l-s)$$

$$M(\frac{l}{2}) = \frac{1}{4} P l$$

$$M(l) = 0$$

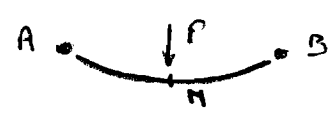
$$-\frac{1}{2} P \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} P l = -\frac{1}{4} P l + \frac{1}{2} P l$$

Diagrammi della Normale (N), del Taglio (T) e del Momento Flettente (M)



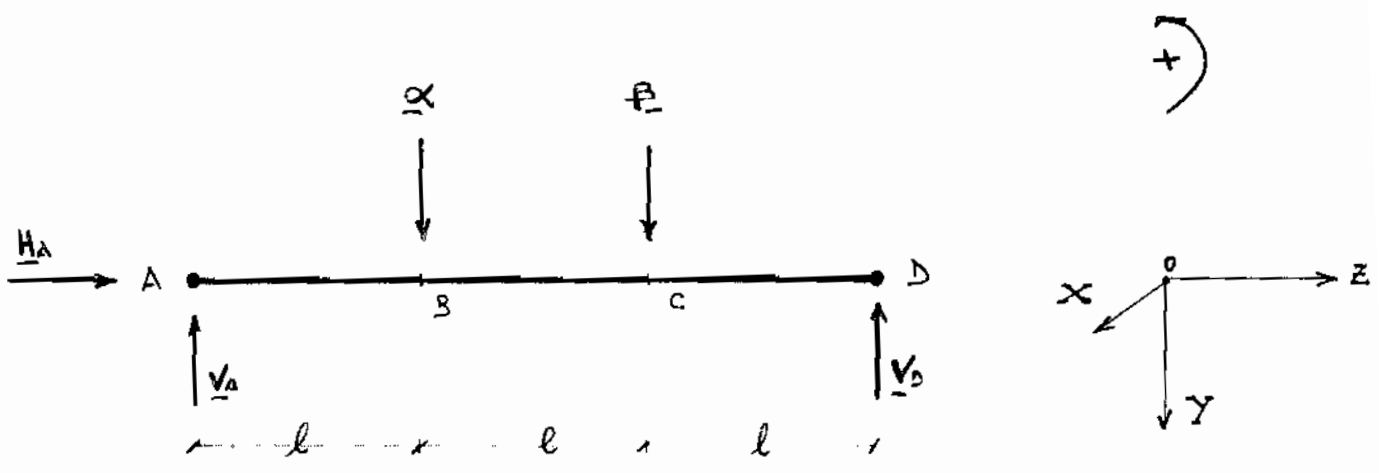
In qualunque sezione effettui il Taglio non ci sono sforzi Normali - il salto del Taglio nella mezzeria è dovuto all'applicazione della forza P in direzione ortogonale;

Mentre il Momento Flettente assume una forma di Triangolo col vertice \bullet in basso nella mezzeria (valore massimo $+\frac{1}{4}Pl$) in quanto la forza P flette la Trave verso il basso, ossia sono tese le fibre di sotto della Trave



SCHEMA STATICO

Per determinare lo schema statico, abbiamo bisogno di sostituire i vincoli con le rispettive REAZIONI VINCOLARI :



dove, abbiamo considerato arbitrariamente i versi delle 3 Reazioni Vincolari ;

per confermare o smentire l'arbitrarietà dei versi, scriviamo l'equazioni di equilibrio alla Trasl. verticale ed orizzontale :

lungo Z → $H_A = 0$ non ci sono altre forze longitudinali ;

lungo Y → $\alpha + \beta - V_A - V_B = 0$

Ci troviamo di fronte ad un'equazione in due incognite (V_A e V_B), pertanto abbiamo bisogno di mettere a sistema una seconda equazione ;

scriviamo l'equazione dei momenti per l'equilibrio alla rotazione scegliendo come polo A, ossia :

polo A → $+V_B \cdot (3l) - \alpha \cdot (l) - \beta \cdot (2l) = 0$

$+V_B \cdot 3l - \alpha l - \beta 2l = 0$

$+V_B \cdot 3l = \alpha l + \beta 2l$

$+V_B \cdot 3l = l \cdot (\alpha + 2\beta)$

$V_B = \frac{l \cdot (\alpha + 2\beta)}{3l} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$

$V_B = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$ sostituendo i valori $V_B = 10 \text{ Tonn}$

Sostituiamo ora \underline{V}_D nell' equazione di equilibrio alla trasl. verticale :

$$\text{lungo } Y \rightarrow \underline{\alpha} + \underline{\beta} - \underline{V}_A - \underline{V}_D = 0$$

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} - \underline{V}_A - \left(\frac{1}{3}\underline{\alpha} + \frac{2}{3}\underline{\beta} \right) = 0$$

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} - \underline{V}_A - \frac{1}{3}\underline{\alpha} - \frac{2}{3}\underline{\beta} = 0$$

$$\underline{V}_A = \left(+\underline{\alpha} - \frac{1}{3}\underline{\alpha} \right) + \left(\underline{\beta} - \frac{2}{3}\underline{\beta} \right) = \frac{2}{3}\underline{\alpha} + \frac{1}{3}\underline{\beta}$$

$$\underline{V}_A = \frac{2}{3}\underline{\alpha} + \frac{1}{3}\underline{\beta}$$

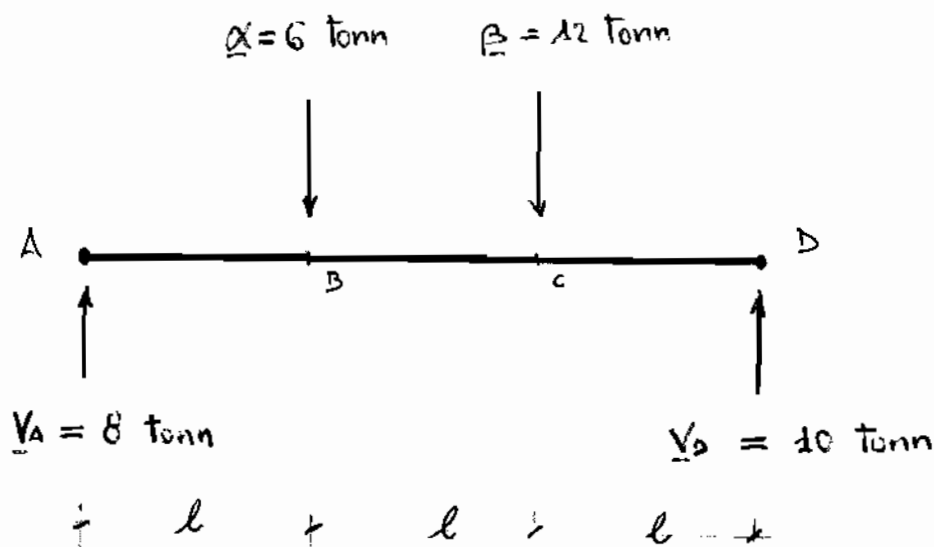
sostituendo i valori, si ottiene :

$$\underline{V}_A = \frac{2}{3} \cdot (6) + \frac{1}{3} \cdot (12) = \frac{6}{3} + \frac{12}{3} = 2 + 4 = 8 \text{ tonn}$$

$$\underline{V}_A = 8 \text{ tonn}$$

Infatti la somma delle due reazioni vincolari \underline{V}_A e \underline{V}_D che spingono dal basso verso l'alto, equilibrano i due carichi $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ che spingono dall'alto verso il basso.

Quindi lo SCHEMA STATICO finale sarà :



NORMALE (\underline{N})

La normale è nulla in quanto non abbiamo sforzi che agiscono in direzione ortogonale alla trave, e pertanto:

$$\underline{N} = 0$$

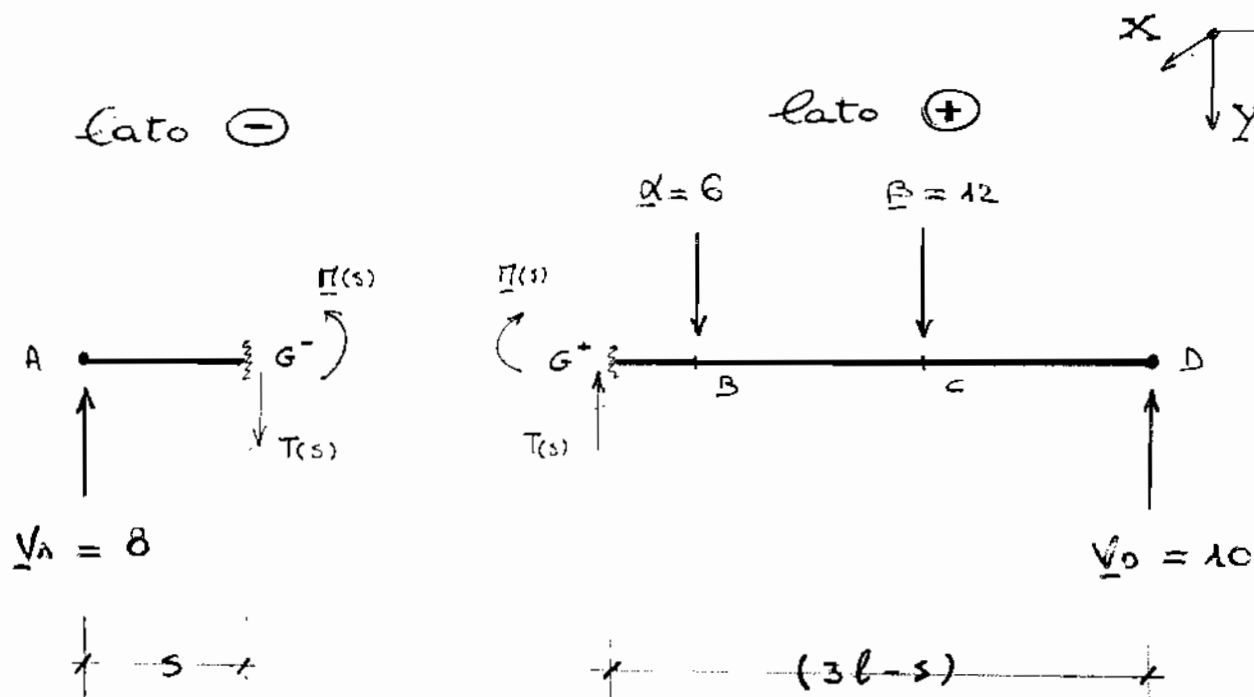
TAGLIO (\underline{T})

caso

$$0 \leq s \leq l$$

(sezioniamo tra A e B)

Sezioniamo la trave in un punto G tra A e B, dove il tratto AG assume la lunghezza s e di conseguenza il tratto restante GD sarà lungo $(3l-s)$:



Guardando il lato \ominus , notiamo che in G $^-$ compare uno SFORZO di TAGLIO $\underline{T}(s)$ che va a contrastare V_A ; pertanto per l'equilibrio alle Trasl. verticali, si ha:

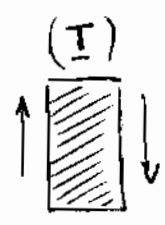
$$+ \underline{T}(s) - V_A = 0$$

$$+ \underline{T}(s) = V_A = 8$$



$$\underline{T}(s) = 8 \text{ tonn}$$

CONVENZIONE DEL TAGLIO



presa un concio di Trave ,

- 1) se il Taglio genera rotazione oraria del concio , e' positivo ;
- 2) se il Taglio genera rotazione antioraria del concio , e' negativo ;

Nel nostro caso, in G' il Taglio T(s) disegnato verso il basso per contrastare VA , genera una rotazione oraria del concio in sezione , pertanto e' positivo ;

quindi, facendo variare S tra 0 ed l (tra A e B) , il Taglio e' costantemente positivo e considerato la LINEA DI RIFERIMENTO al di sotto della Trave , va' disegnato dalla parte superiore -



MOMENTO FLETTENTE (caso 0 <= s <= l)

Osservando il lato ⊖ , notiamo che la coppia VA e T(s) (indipendentemente dal polo) genera una rotazione oraria del tratto S , che per essere equilibrata , ha bisogno di un Momento Flettente M(s) in G' di tipo antiorario ; pertanto l'equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione , sara' :

polo G' → + M(s) - VA · (s) = 0

M(s) = VA · S

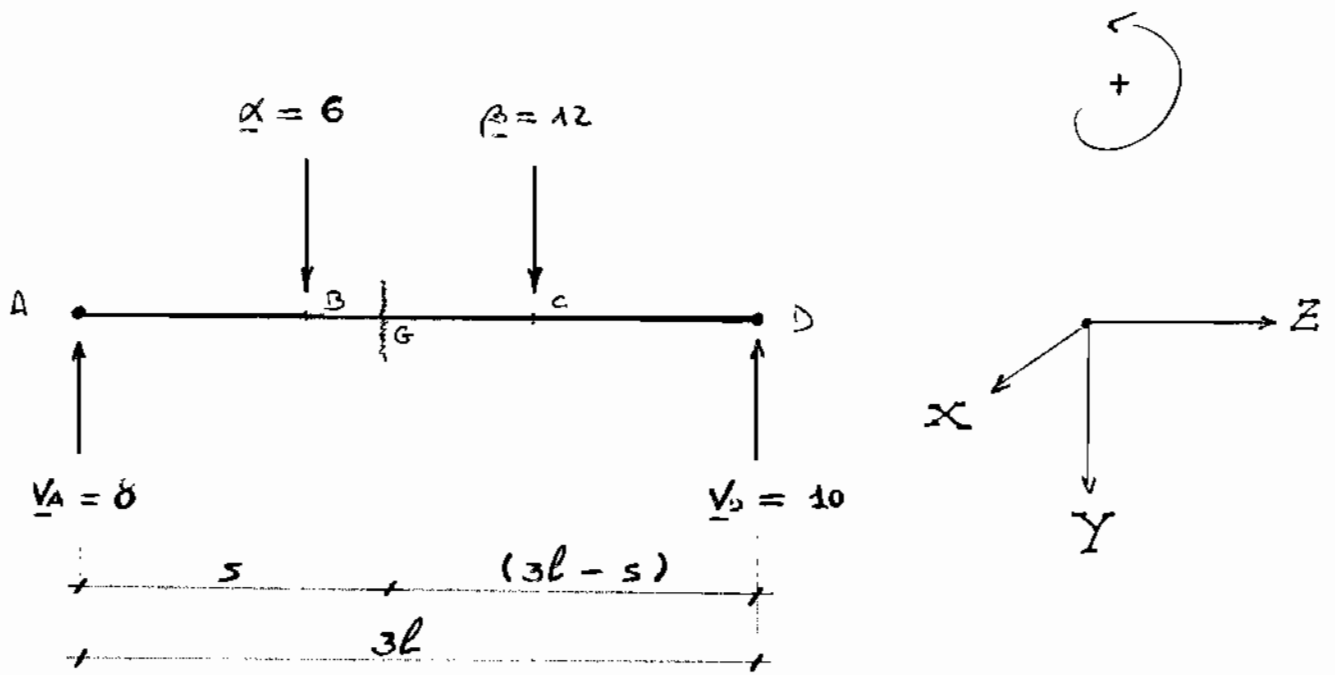
$$\begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \\ s=l \rightarrow M(s) = VA \cdot l = 8 \cdot 5 = 40 \end{cases}$$

Il fatto che l'equazione di equilibrio mi fornisce un valore positivo del Momento Flettente, mi conferma il senso di rotazione antiorario scelto nella sezione G' ; ora , questo Momento Flettente tende le fibre inferiori della Trave , e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE , risulta essere positivo e va' disegnato dalla parte della linea di riferimento scelta dalla parte di sotto della Trave .

TAGLIO (caso $l < s < 2l$)

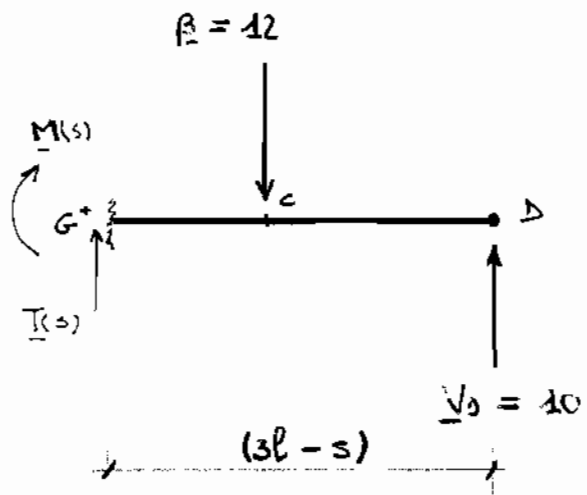
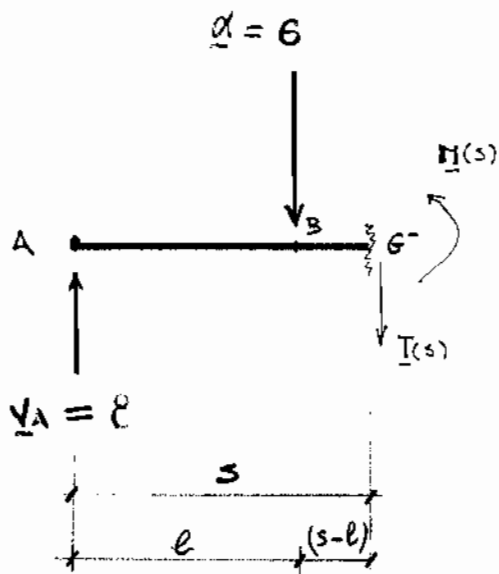
Sezioniamo la trave in un punto G tra B e C, dove il tratto AG assume la lunghezza s e di conseguenza il tratto restante GD sarà lungo $(3l - s)$;

ATTENZIONE : del tratto s scelto, quello che a noi interessa è far variare questa lunghezza tra B e C (in quanto tra A e B, abbiamo già visto cosa succede);



lato \ominus

lato \oplus



Osserviamo il lato \ominus , notiamo che affinché si abbia l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, nella sezione di taglio compare uno SFORZO di TAGLIO $\underline{T}(s)$, il quale dovrà essere necessariamente diretto verso il basso per bilanciare la somma delle altre due forze \underline{V}_A e $\underline{\alpha}$; pertanto l'equazione di equilibrio alla trasl. verticale sarà:

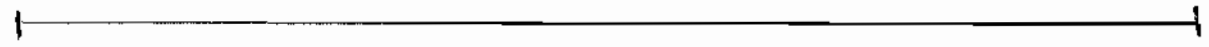
$$\text{lungo } Y \rightarrow + \underline{T}(s) + \underline{\alpha} - \underline{V}_A = 0$$

$$\underline{T}(s) = + \underline{V}_A - \underline{\alpha}$$

Sostituendo i valori:

$$\underline{T}(s) = \underline{V}_A - \underline{\alpha} = 8 - 6 = 2 \quad \text{ossia} \quad \boxed{\underline{T}(s) = 2 \text{ Tonn}}$$

Ora notiamo che, per la CONVENZIONE DEL TAGLIO, il taglio $\underline{T}(s)$ diretto verso il basso, genera una rotazione oraria del cono nella sezione G, pertanto è positivo; graficamente va disegnato dalla parte superiore della linea di riferimento, con andamento costantemente positivo di modulo (2 tonn) -



MOMENTO FLETTENTE : caso (l <= s <= 2l)

Osservando il lato \ominus , notiamo che affinché si abbia l'EQUILIBRIO DEI MOMENTI, nella sezione di taglio compare un MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$, il quale dovrà essere necessariamente antiorario per bilanciare la somma degli altri due momenti (il momento dato da \underline{V}_A è orario, ed è più grande del momento dato da $\underline{\alpha}$) calcolati rispetto al polo G; pertanto, per la CONVENZIONE DEL MOMENTO, l'equazione di equilibrio alla rotazione sarà:

$$\text{polo } G \rightarrow + \underline{M}(s) - \underline{V}_A \cdot (s) + \underline{\alpha} \cdot (s-l) = 0$$

$$\underline{M}(s) = -\underline{\alpha} \cdot (s-l) + \underline{V}_A \cdot s$$

$$\underline{M}(s) = -\underline{\alpha} \cdot s + \underline{\alpha} \cdot l + \underline{V}_A \cdot s = (-\underline{\alpha} \cdot s + \underline{V}_A \cdot s) + \underline{\alpha} \cdot l$$

$$\underline{M}(s) = s \cdot (\underline{V}_A - \underline{\alpha}) + \underline{\alpha} \cdot l = s \cdot (8 - 6) + 6 \cdot 5$$

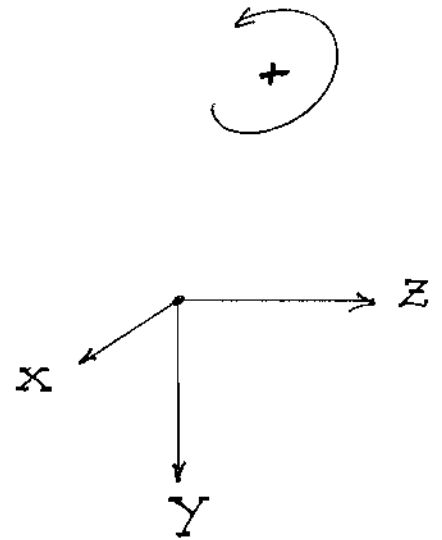
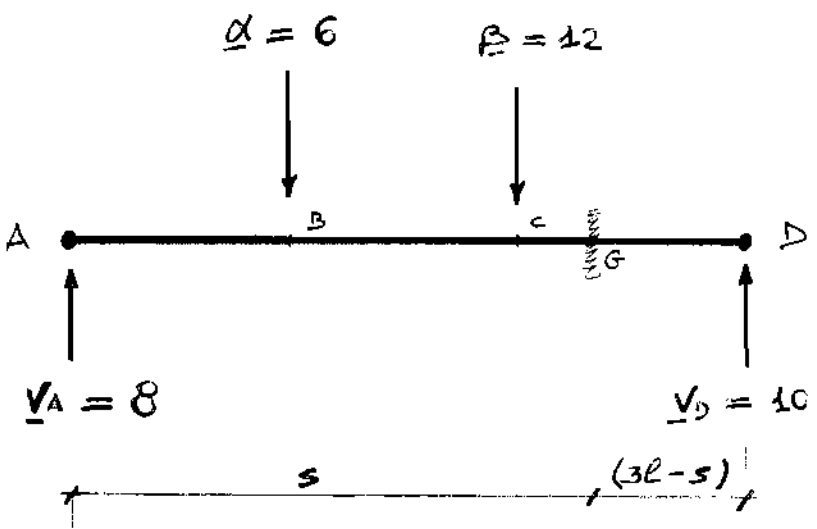
$$\boxed{\underline{M}(s) = 2s + 30} \quad \begin{cases} s=l=5 \rightarrow \underline{M}(s) = 2 \cdot 5 + 30 = +40 \quad (\text{nel punto B}) \\ s=2l=10 \rightarrow \underline{M}(s) = 2 \cdot 10 + 30 = +50 \quad (\text{nel punto C}) \end{cases}$$

Ora notiamo che, questo momento flettente (necessariamente antiorario) tende le fibre inferiori della trave e per la CONVENZIONE DELLE FIGURE, risulta essere positivo e va disegnato dalla parte della linea di riferimento -

TAGLIO : caso ($2l < s < 3l$)

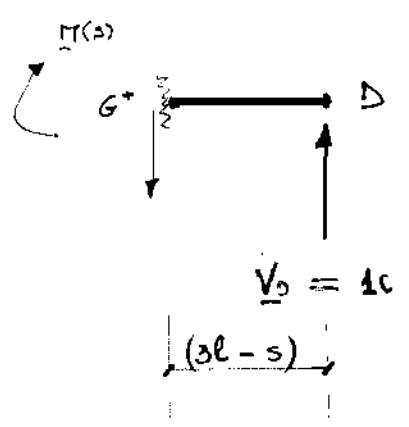
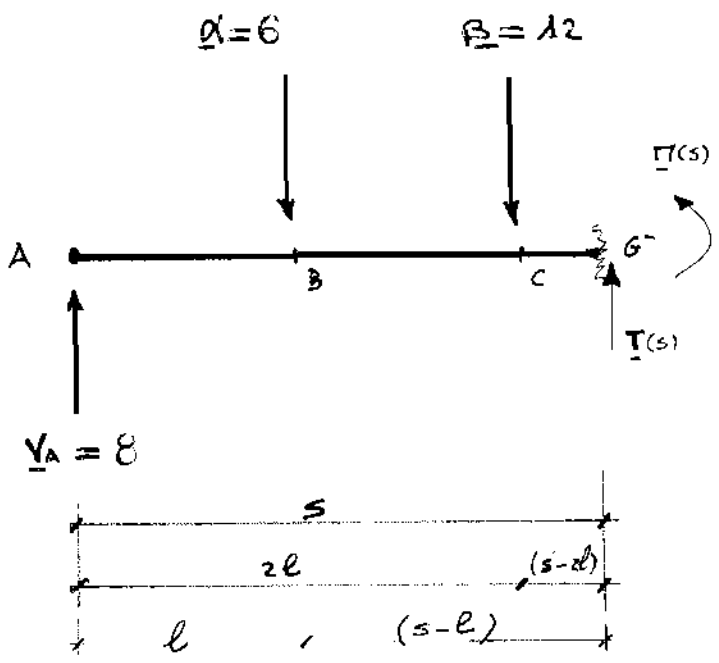
Sezioniamo la trave in un punto G tra C e D, dove il tratto AG assume la lunghezza s e di conseguenza il tratto restante GD sarà lungo $(3l - s)$;

ATTENZIONE : del tratto s scelto, quello che a noi interessa è far variare questa lunghezza tra C e D (in quanto, negli altri due tratti, conosciamo gli andamenti grafici);



lato \ominus

lato \oplus



Osserviamo il lato \ominus , notiamo che affinché si abbia l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, nella sezione di Taglio G, compare uno SFORZO DI TAGLIO $\underline{T}(s)$, il quale dovrà essere necessariamente diretto verso l'alto per bilanciare la somma delle altre tre forze \underline{VA} , $\underline{\alpha}$ & $\underline{\beta}$;
 pertanto, l'equazione di equilibrio alla trasl. verticale sarà :

$$\text{lungo } Y \rightarrow -\underline{T}(s) - \underline{VA} + \underline{\alpha} + \underline{\beta} = 0$$

$$\underline{T}(s) = \underline{\alpha} + \underline{\beta} - \underline{VA} = 6 + 12 - 8 = 10$$

$\underline{T}(s) = 10 \text{ tonn}$

Ora notiamo che, il Taglio $\underline{T}(s)$ trovato (necessariamente verso l'alto), genera una rotazione del concio nella sezione G che per la CONVENZIONE DEL TAGLIO, risulta essere negativo ;
 graficamente va disegnato dalla parte inferiore della linea di riferimento, con andamento costantemente negativo di modulo (10 tonn).

MOMENTO FLETTENTE : caso ($2l < s < 3l$)

Osservando il lato \ominus , notiamo che affinché si abbia l'EQUILIBRIO DEI MOMENTI, nella sezione di Taglio G, compare un MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$ che ipotizziamo essere antiorario (positivo), in quanto dal grafico si capisce la complessità dell'equazione (non abbiamo la certezza di come dev'essere il momento) ;
 calcolando i momenti rispetto al polo G e rispettando la CONVENZIONE DEL MOMENTO, l'equazione di equilibrio alla rotazione sarà :

$$\text{polo G} \rightarrow + \underline{M}(s) + \underline{\alpha} \cdot (s-l) + \underline{\beta} \cdot (s-2l) - \underline{VA} \cdot (s) = 0$$

$$+ \underline{M}(s) = -\underline{\alpha} \cdot (s-l) - \underline{\beta} \cdot (s-2l) + \underline{VA} \cdot (s)$$

da cui, con alcuni passaggi si ottiene :

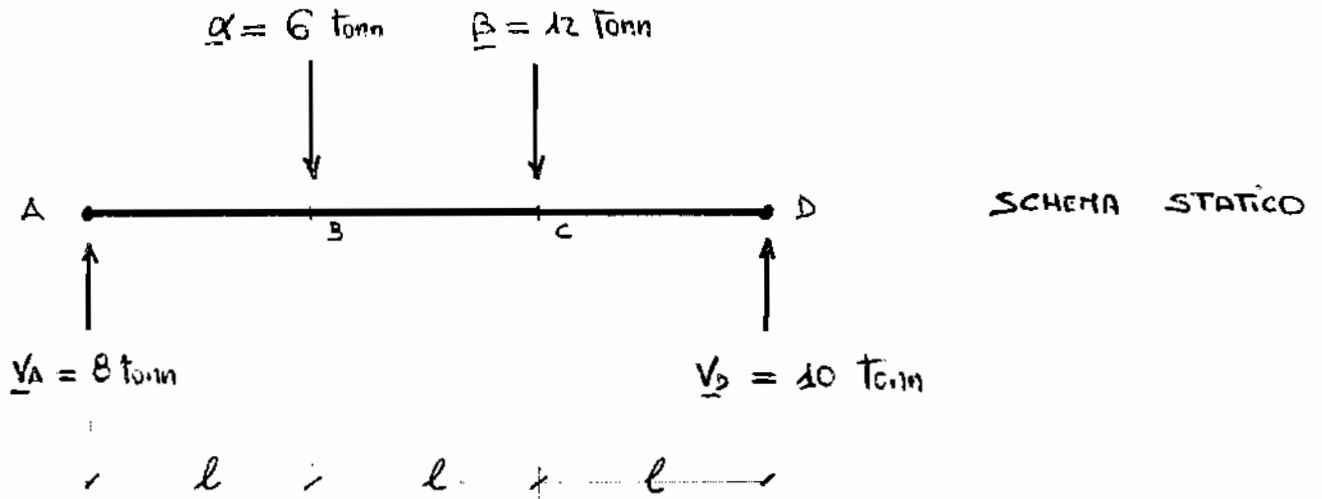
$\underline{M}(s) = 150 - 10 \cdot s$

}

$s = 2l = 10 \rightarrow \underline{M}(s) = +50 \text{ tonn. (in B)}$
 $s = 3l = 15 \rightarrow \underline{M}(s) = 0 \text{ (in D)}$

il segno positivo del risultato ci conferma l'ipotesi di $\underline{M}(s)$ antiorario (positivo) ;
 ora notiamo che, questo momento flettente (confermato antiorario) tende le fibre inferiori della trave e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, risulta essere positivo e va disegnato dalla parte della linea di riferimento.

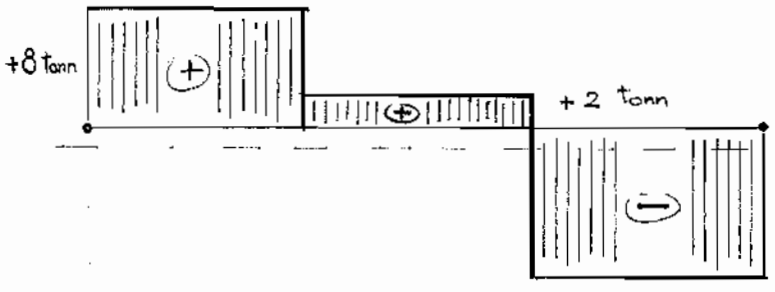
DIAGRAMMI



(N)

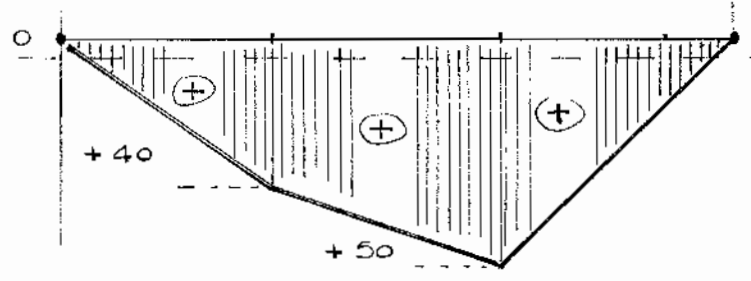


(T)



Da A a B, il taglio è costantemente positivo e vale 8 tonn. ; in B subisce una riduzione che lo porta ad essere costantemente positivo di modulo 2 tonn. e -10 tonn sino a C ; in questo punto subisce un SALTO che lo porta ad essere costantemente negativo di modulo -10 tonn, sino all'estremo D -

(M)



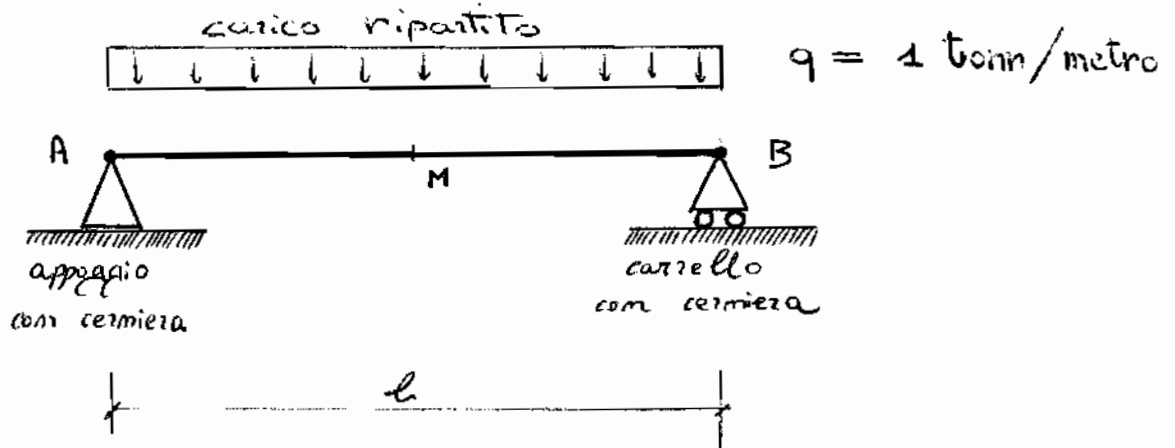
Il momento Flettente $M(s)$ risulta essere positivo in ogni sezione di taglio della trave, ossia tende sempre le fibre inferiori della trave -

ESERCIZIO

Trave con carico ripartito ;

1

della 6-12006



ANALISI ESTERNA :

In A abbiamo un Appoggio con cerniera, ossia un vincolo doppio in quanto impedisce le due traslazioni, verticale ed orizzontale; consente solo la rotazione \bullet , quindi $\bullet 1$ grado di libertà; trattasi di un SISTEMA LABILE (i moti impediti sono inferiori ai 3 moti possibili)

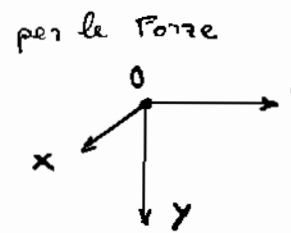
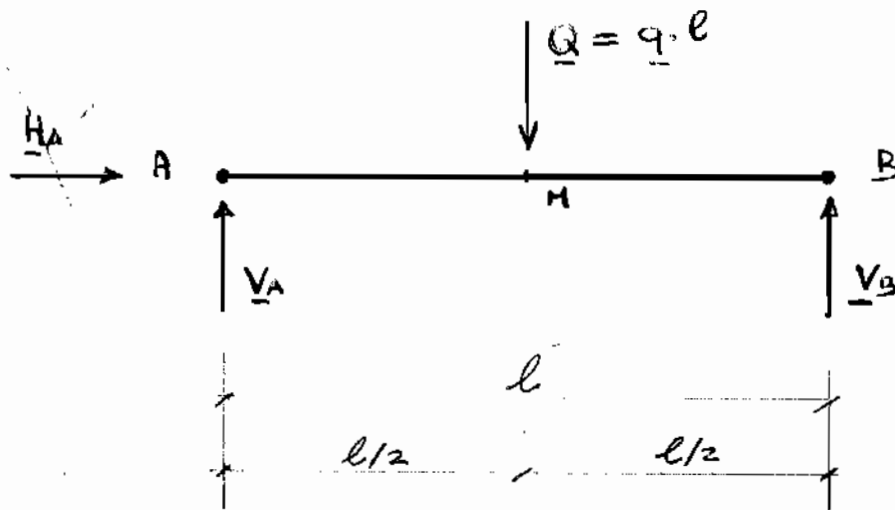
In B abbiamo un Carrello con cerniera, ossia un vincolo semplice in quanto impedisce solo la traslazione verticale, ma consente contemporaneamente la trasl. orizzontale e la rotazione \bullet ; quindi 2 gradi di libertà;

trattasi di un SISTEMA LABILE ~~2 moti impediti~~ ;

Nel complesso, A e B danno un SISTEMA ISOSTATICO ~~2~~, ossia il numero di moti impediti, eguaglia il numero di moti possibili.

② Schema Statico :

Sostituisco ai vincoli A e B le rispettive Reazioni Vincolari
~~ed inoltre~~ ed inoltre al posto del Carico Ripartito q ,
sostituisco il carico concentrato $Q = q \cdot l$ in Mezzera M , ossia :



Per i Momenti
+)

Eq. alla Trasl. orizzontale \rightarrow $H_A = 0$

Equilibrio alla Trasl. Verticale delle Forze, Attive e Reattive :

$$Q - V_A - V_B = 0$$

$$q \cdot l - V_A - V_B = 0$$

$$q \cdot l = V_A + V_B$$

- Preso come Polo A , vediamo l'Equilibrio dei Momenti :

$$- Q \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + V_B \cdot (l) = 0$$

$$- q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + V_B \cdot l = 0$$

$$- \frac{q \cdot l^2}{2} + V_B \cdot l = 0$$

$$+ l \cdot \left(-\frac{q \cdot l}{2} + V_B\right) = 0$$

$$-\frac{q \cdot l}{2} + V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

ora sostituendo il valore di \underline{V}_3 nella :

(3)

$$q \cdot l = \underline{V}_A + \underline{V}_3$$

otteniamo :

$$q \cdot l = \underline{V}_A + \left(\frac{q \cdot l}{2} \right)$$

$$\underline{V}_A = q \cdot l - \frac{q \cdot l}{2}$$

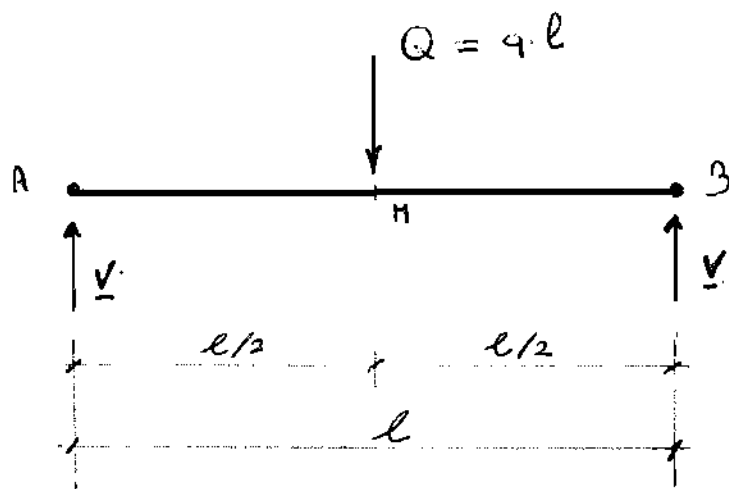
$$\underline{V}_A = q \cdot l \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = q \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\boxed{\underline{V}_A = \frac{q \cdot l}{2}}$$

Oppure possiamo fare le considerazioni grafiche per trovare i valori di \underline{V}_A e \underline{V}_3 , ossia, essendo Q concentrato in mezzo, essendo \underline{V}_A e \underline{V}_3 equidistanti da M e non essendoci altre forze esterne agenti sul sistema isostatico possiamo dire che :

$$\underline{V}_A = \underline{V}_3 = \underline{V}$$

e quindi graficamente si ha :



④

Ora l'equilibrio alle Trasl. Verticale ci dice che :

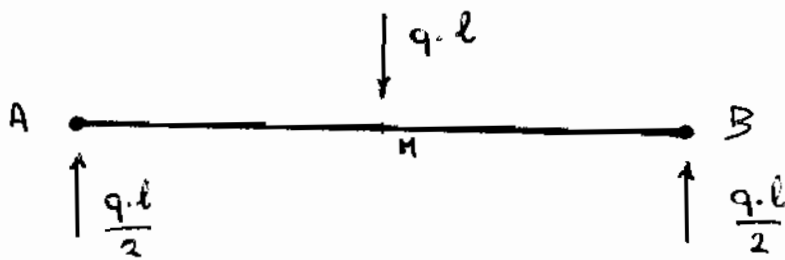
$$q \cdot l = \underline{V_A} + \underline{V_B}$$

che diventa :

$$q \cdot l = \underline{V} + \underline{V} = 2\underline{V}$$

$$q \cdot l = 2\underline{V} \Rightarrow \boxed{\underline{V} = \frac{q \cdot l}{2}}$$

e quindi graficamente possiamo concludere :

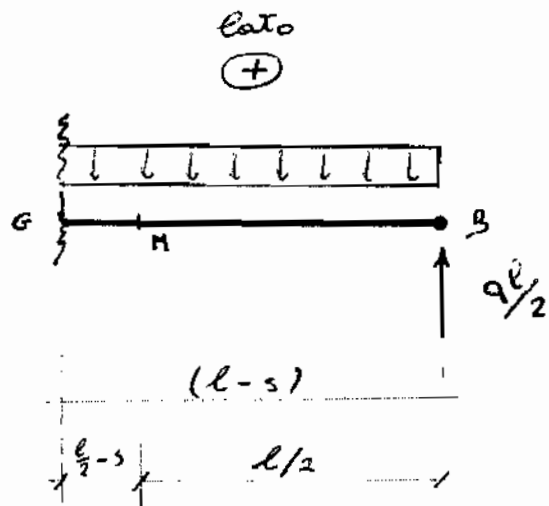
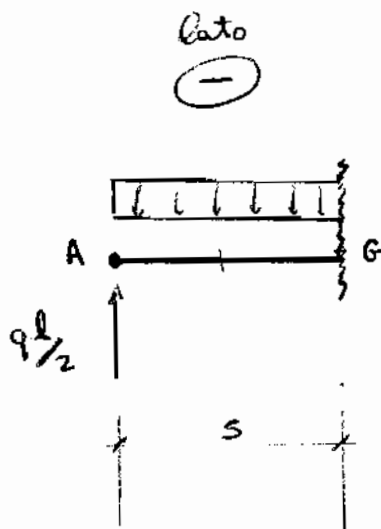
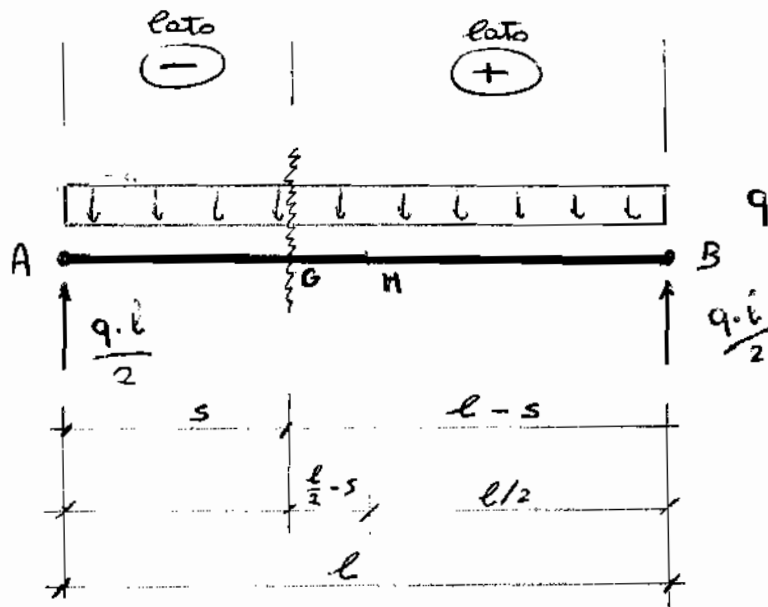


ANALISI INTERNA

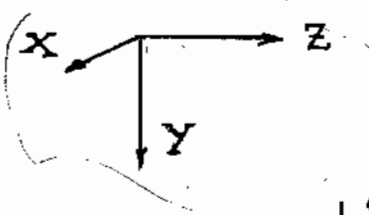
5

Per poter disegnare i **DIAGRAMMI** della Normale (N), del Taglio (T) e del Momento Flettente (M), abbiamo bisogno di fare una Analisi Interna della Trave, andando a sezionare questa in due punti arbitrari, prima e dopo la sezione di mezz'ora M .

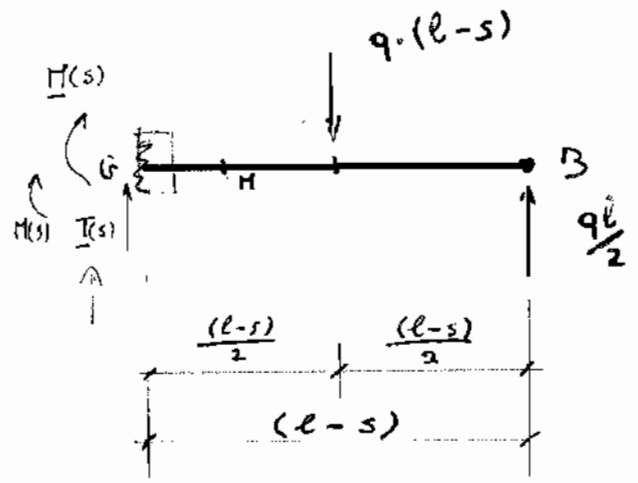
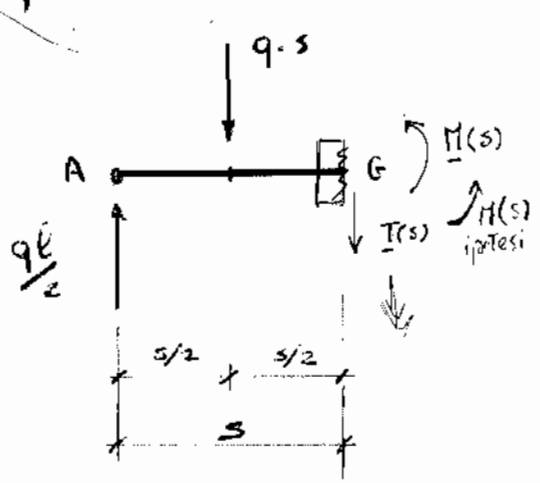
Iniziamo con una sezione alla sinistra di M , tenendo conto del carico Ripartito $q \cdot l$ (e non del carico concentrato Q):



6) Ora osservando il lato \ominus , ~~considera~~ sostituisce al carico ripartito il rispettivo carico concentrato agente su questo tratto s di Trave; stessa cosa per il lato \oplus , ossia:



CASO $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$



lato \ominus

lato \oplus

Ipotizzando $T(s)$ verso il basso nel lato \ominus abbiamo la seguente equazione di equilibrio alla Trasl. verticale:

$$-\frac{q \cdot l}{2} + q \cdot s + T(s) = 0$$

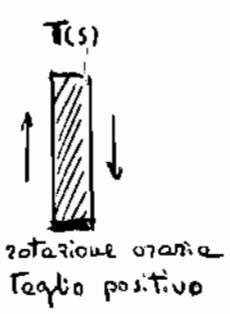
da cui $T(s) = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot s = q \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right) \Rightarrow T(s) = q \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right)$

Verificando nel lato \oplus , dobbiamo considerare $T(s)$ verso l'alto in quanto vale il PRINCIPIO di AZIONE e REAZIONE per una sezione, quindi si ha la seguente equazione di equilibrio alla Trasl. verticale:

$$+ q \cdot (l-s) - \frac{q \cdot l}{2} - T(s) = 0; \text{ da cui } T(s) = q \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right)$$

perciò è confermato il modulo del Taglio $T(s)$

CONVENZIONE DEL TAGLIO nel caso $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$



$$T(s) = q \cdot \left(\frac{l}{2} - s\right) \begin{cases} s=0 \rightarrow T(s) = + q \cdot \frac{l}{2} / \text{Taglio positivo in A;} \\ s=\frac{l}{2} \rightarrow T(s) = 0 / \text{Taglio nullo in Mezzavia;} \end{cases}$$

Per tanto, alla sinistra della sezione di Mezzavia il Taglio è Positivo e quindi da una rotazione oraria, che per la CONVENZIONE, conferma la Tesi iniziale sul Taglio

Ora, osservando il lato \ominus , ipotizziamo un Momento Flettente $M(s)$ che da' una rotazione antioraria (quindi per il riferimento dei momenti \uparrow e positivo) al conico in G scelto come polo G, si ha la seguente equazione di equilibrio dei momenti:

$$\underline{M}(s) - \frac{q \cdot l}{2} \cdot (s) + q \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = 0$$

$$\underline{M}(s) = + \frac{q \cdot l}{2} \cdot (s) - q \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\underline{M}(s) = \frac{q \cdot l \cdot s}{2} - \frac{q \cdot s^2}{2}$$

Verifica lato \oplus , prendendo il Momento Flettente $\underline{M}(s)$ orario per il principio di Azione e Reazione (quindi negativo):

$$\text{polo in G} \rightarrow + \frac{q \cdot l}{2} \cdot (l-s) - [q \cdot (l-s)] \cdot \left(\frac{l-s}{2}\right) - \underline{M}(s) = 0$$

$$\underline{M}(s) = - \frac{q \cdot (l-s)^2}{2} + \frac{q \cdot l \cdot (l-s)}{2}$$

$$\underline{M}(s) = - \frac{q \cdot (l^2 - 2ls + s^2)}{2} + \left(\frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l \cdot s}{2} \right)$$

$$\underline{M}(s) = - \frac{q \cdot l^2}{2} + q \cdot l \cdot s - \frac{q \cdot s^2}{2} + \frac{q \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l \cdot s}{2}$$

$$\underline{M}(s) = \left(+ q \cdot l \cdot s - \frac{q \cdot l \cdot s}{2} \right) - \frac{q \cdot s^2}{2}$$

$$\underline{M}(s) = + \frac{q \cdot l \cdot s}{2} - \frac{q \cdot s^2}{2}$$

PERTANTO, E' CONFERMATO IL MODULO DEL MOMENTO FLETTENTE

8

CONVENZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE: nel caso $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$

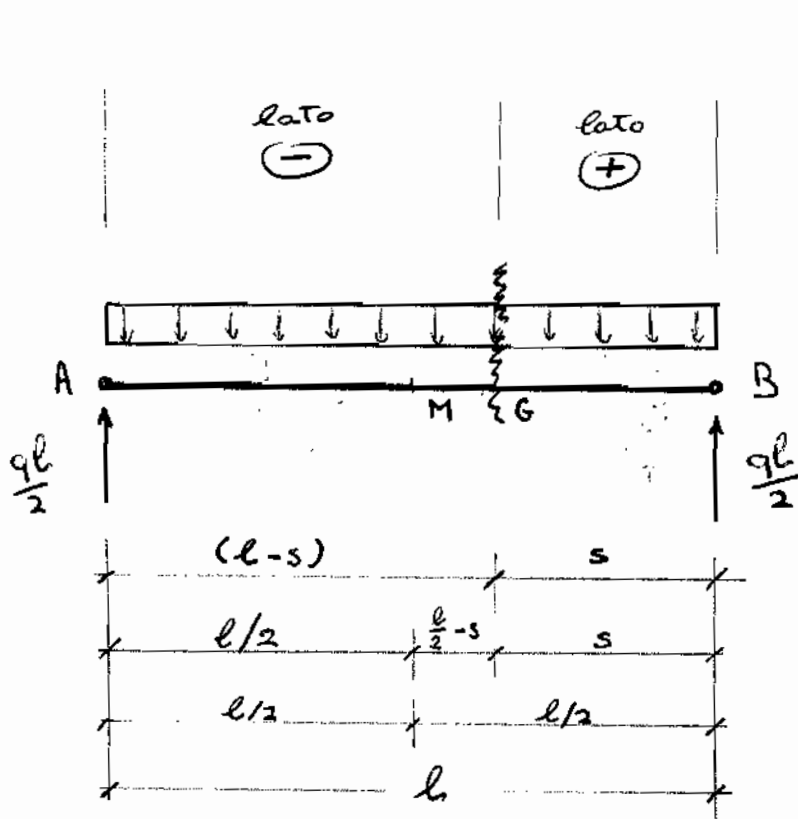
Prendiamo il modulo di $\underline{M}(s)$ e vediamo agli estremi cosa succede:

$$\underline{M}(s) = \frac{q \cdot s \cdot l}{2} - \frac{q \cdot s^2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow \underline{M}(s) = 0 \quad \text{neutro} \\ s = \frac{l}{2} \rightarrow \underline{M}(s) = + \frac{q \cdot l^2}{8} \quad \text{Momento Positivo} \end{array} \right.$$

Pertanto, alla sinistra della sezione di riferimento, facendo variare s dall'estremo A alla mezzeria M , il Momento Flettente $\underline{M}(s)$ ha un andamento parabolicamente positivo che dà una rotazione antioraria (per la convenzione dei momenti \oplus) ad ogni concio del lato \ominus , e quindi conferma la tesi iniziale sul Momento Flettente $\underline{M}(s)$ (ipotizzato antiorario); inoltre, saranno tese le fibre inferiori in questo tratto $0 \leq s \leq \frac{l}{2}$ della Trave, in quanto il momento flettente $\underline{M}(s)$ è positivo e pertanto il suo diagramma sarà rappresentato dalla parte sottostante la Trave, con valore nullo all'estremo A , poi con andamento parabolico, assume valore massimo in mezzeria $(+ \frac{q l^2}{8})$.

Ora invece, sezioniamo la Trave alla destra della mezzzeria M , tenendo conto del carico ripartito $Q = q \cdot l$:

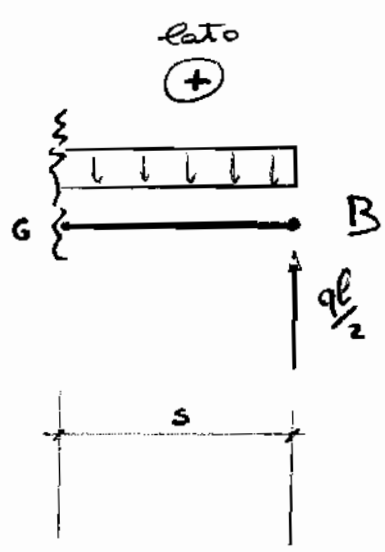
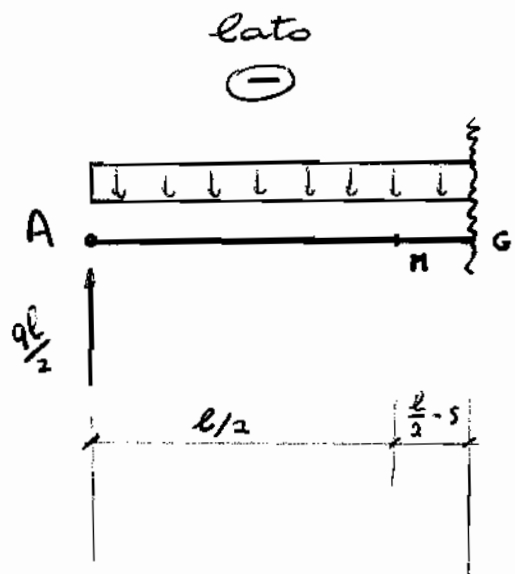
9



CASO
 $\frac{l}{2} \leq s \leq l$

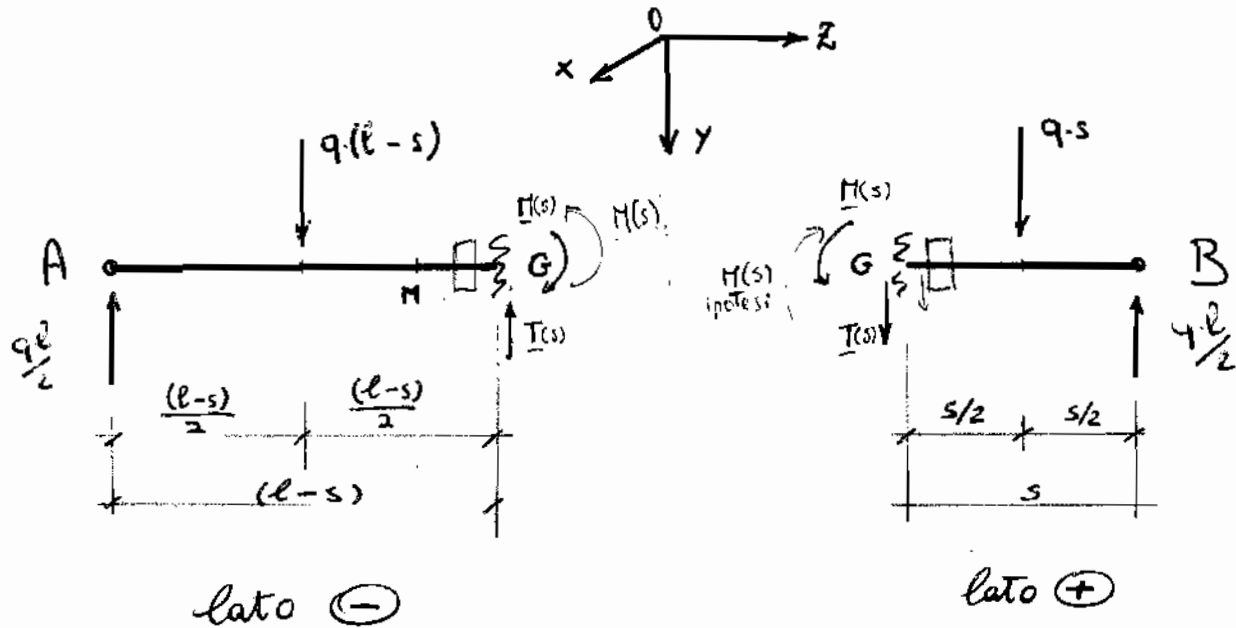
cioè, vado dalle mezzzeria M ($\frac{l}{2}$) all' estremo B (l)

Separando si ottiene :



(10)

Ora, sostituiamo al carico ripartito ~~il~~ il rispettivo carico concentrato, sia nel lato \oplus che nel lato \ominus , ossia:



Ora, guardando il lato \oplus , ipotizzo un taglio $T(s)$ verso il basso e pertanto abbiamo la seguente equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

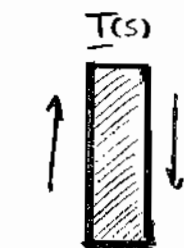
$$\underline{T}(s) + q \cdot s - \frac{q \cdot l}{2} = 0 \Rightarrow \underline{T}(s) = + q \cdot \left(\frac{l}{2} - s \right) \quad \text{lato } \oplus$$

Verificando nel lato \ominus , dobbiamo considerare $T(s)$ verso l'alto per il PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE (per una sezione), quindi si ha la seguente equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

$$+ q \cdot (l-s) - \frac{q \cdot l}{2} - \underline{T}(s) = 0 \Rightarrow \underline{T}(s) = + q \cdot \left(\frac{l}{2} - s \right) \quad \text{lato } \ominus$$

QUINDI, È CONFERMATO IL MODULO DEL TAGLIO $T(s)$

CONVENZIONE DEL TAGLIO



$$\underline{T}(s) = q \cdot \left(\frac{l}{2} - s \right) \begin{cases} s = \frac{l}{2} \rightarrow \underline{T}(s) = 0 & \text{Taglio nullo in Mezzeria;} \\ s = l \rightarrow \underline{T}(s) = - \frac{q \cdot l}{2} & \text{Taglio negativo in B;} \end{cases}$$

Quindi, facendo variare s tra la Mezzeria e l'estremo B, ossia alla destra della mezzeria, il taglio è negativo e dà una rotazione antioraria (come vuole la convenzione acciuto) ad ogni corso di questo tratto; pertanto, confermiamo la tesi iniziale del taglio preso verso il basso e lo rappresento effettivamente verso il basso in G, lato \oplus .

Ora, guardando il lato \oplus , ipotizziamo un Momento Flettente $\underline{M}(s)$ che da una rotazione oraria (quindi negativo per la convenzione \rightarrow dei momenti) al cuneo in G e scelto come polo il punto G, si ha la seguente equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione:

$$+ \frac{q \cdot l}{2} \cdot (s) - qs \cdot \left(\frac{s}{2}\right) - \underline{M}(s) = 0$$

$$\underline{M}(s) = \frac{ql}{2} \cdot (s) - qs \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = \frac{qls}{2} - \frac{qs^2}{2}$$

$$\underline{M}(s) = + \frac{qls}{2} - \frac{qs^2}{2} \quad \text{lato } \oplus$$

Verifica lato \ominus , prendendo $\underline{M}(s)$ antiorario (quindi positivo per la convenzione \rightarrow dei momenti) per il PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE all' $\underline{M}(s)$ del lato \oplus , e con polo in G abbiamo la seguente equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione:

$$\text{polo in G} \rightarrow + \underline{M}(s) + [q(l-s)] \cdot \left[\frac{(l-s)}{2}\right] - \frac{ql}{2} \cdot (l-s) = 0$$

$$\underline{M}(s) = \frac{ql}{2} \cdot (l-s) - [q(l-s)] \cdot \left[\frac{(l-s)}{2}\right]$$

$$\underline{M}(s) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qls}{2} - \left[\frac{q \cdot (l-s)^2}{2} \right] = \frac{ql^2}{2} - \frac{qls}{2} - \left[\frac{q \cdot (l^2 - 2ls + s^2)}{2} \right]$$

$$\underline{M}(s) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qls}{2} - \left[\frac{ql^2}{2} - qls + \frac{qs^2}{2} \right]$$

$$\underline{M}(s) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qls}{2} - \frac{ql^2}{2} + qls - \frac{qs^2}{2} = \left(-\frac{qls}{2} + qls \right) - \frac{qs^2}{2}$$

$$\underline{M}(s) = + \frac{qls}{2} - \frac{qs^2}{2} \quad \text{lato } \ominus$$

PERTANTO, È CONFERMATO IL MODULO DEL MOMENTO FLETTENTE

CONVENZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE: nel caso $l/2 \leq s \leq l$

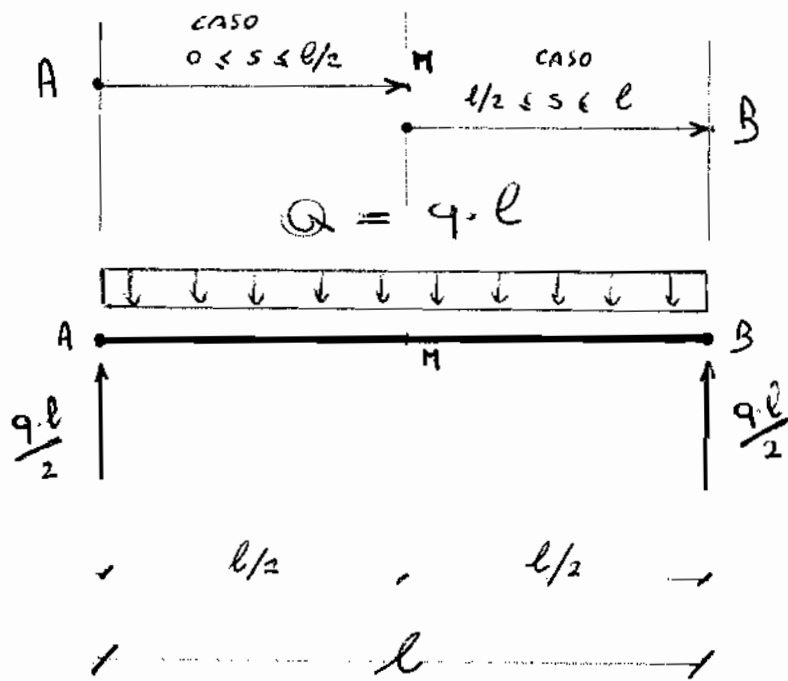
Prendiamo il modulo del Momento Flettente $M(s)$ e vediamo cosa succede facendolo variare s , dalla mazzetta all'estremo B, ossia:

$$M(s) = + \frac{qls}{2} - \frac{qs^2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{l}{2} \rightarrow M(s) = + \frac{ql^2}{8} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Momento Flettente} \\ \text{Positivo in mazzetta} \end{array} \right. \\ s = l \rightarrow M(s) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Momento Flettente} \\ \text{nullo all'estremo B} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

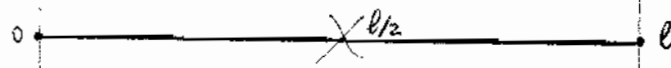
Pertanto alla destra della sezione di mazzetta, facendo variare s dalla mazzetta all'estremo B, il Momento Flettente $M(s)$ ha un andamento parabolico positivo (come si vede dai risultati) che dà una rotazione antioraria (per la convenzione \rightarrow dei momenti) ad ogni corso del lato \oplus , e quindi sintetisce la tesi iniziale sul Momento Flettente $M(s)$, ipotizzato orario in G, lato \oplus -

Inoltre, saranno tese le fibre inferiori in questo tratto $l/2 \leq s \leq l$ della trave, in quanto il Momento Flettente è positivo e pertanto il suo diagramma sarà rappresentato dalla parte sottostante la trave, con valore massimo in mazzetta $(+\frac{ql^2}{8})$, poi con andamento parabolico assume valore nullo all'estremo B -

DIAGRAMMA della Normale (N), del Taglio (T) e del Momento Flettente (M)

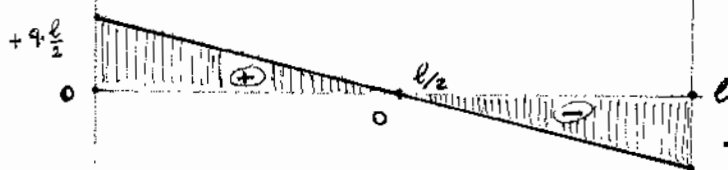


(N)



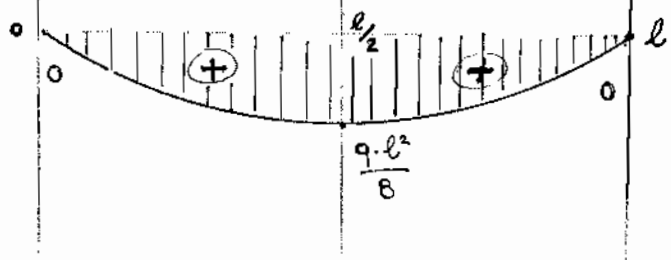
Normale nulla in quanto non ci sono forze esterne orizzontali applicate alla Trave.

(T)

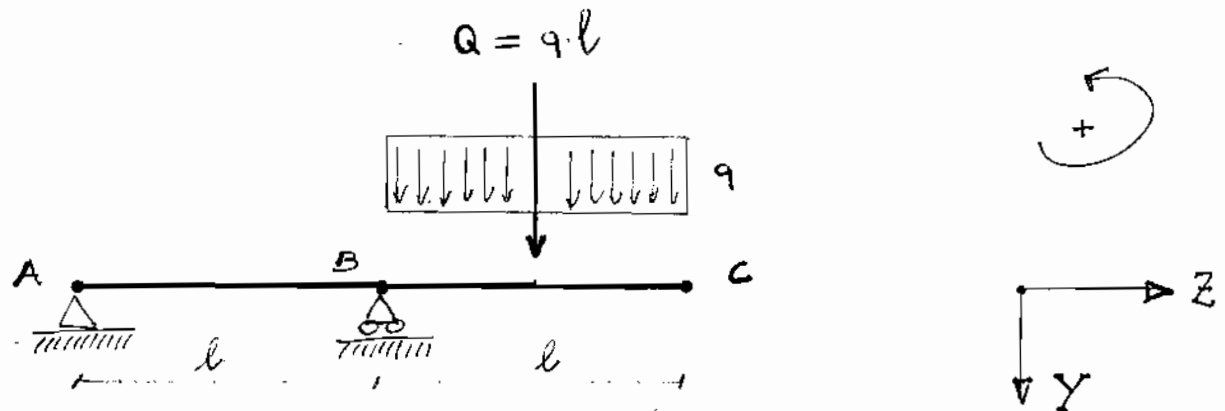


Taglio Positivo alla sinistra della Mezzeria, nullo in mezzeria e negativo alla destra di esse con valore massimo agli estremi.

(M)



Momento Flettente Positivo in ogni sezione della Trave, che tende le fibre inferiori della Trave con un valore massimo in mezzeria ed un valore nullo agli estremi A e B.



Si chiede di determinare le rotazioni: $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$;
 poi la reazione vincolare ausiliaria \underline{V}_C ed infine l'andamento
 qualitativo della deformata -

ANALISI CINEMATICA

In A abbiamo un APPOGGIO - CERNIERA che impedisce
 traslazione orizzontale e verticale e consente la sola rotazione;
 quindi, in altre parole impedisce 2 dei 3 moti possibili che
 la trave può avere nel PIANO ZY -

Mentre in B abbiamo un CARRELLO - CERNIERA che impedisce la
 sola traslazione orizzontale e consente invece la traslazione
 orizzontale e la rotazione;
 quindi, in altre parole, impedisce 1 dei 3 moti possibili che
 la trave può avere nel PIANO ZY -

Infine, in C abbiamo l'ESTREMO LIBERO, che nell'ipotesi
 in cui la trave fosse libera dai vincoli in A e B, consentirebbe
 tutti e 3 i moti possibili nel piano -

In definitiva, per quanto detto, i 3 moti impediti nel
 complesso, sarebbero i VINCOLI del sistema ai quali vanno
 sostituite le rispettive REAZIONI VINCOLARI -

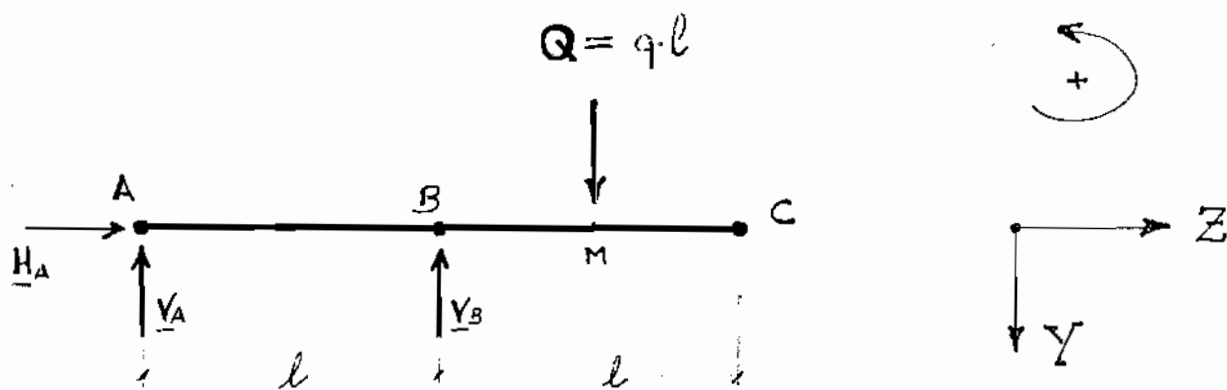
$$\text{VINCOLI} - \text{G.d.L.} = 3 - 3 = 0$$

SISTEMA
 ISOSTATICO

2

ANALISI ESTERNA

Sostituiamo ai vincoli APPOGGIA - CERNIERA in A e CARRELLI - CERNIERA in B, le rispettive reazioni vincolari e ai fini di determinare lo SCHEMA STATICO, consideriamo il CARICO RIPARTITO q (ossia il carico distribuito uniformemente lungo tutto il tratto BC di luce l) come se fosse un CARICO CONCENTRATO $Q = ql$ nella mezzina M del tratto BC, ossia come segue:



Equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

LUNGO $Z \rightarrow \boxed{+H_A = 0}$ non ci sono altre FORZE ESTERNE lungo Z ;

Equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

LUNGO $Y \rightarrow -V_A - V_B + Q = 0$

Ci troviamo di fronte ad un'equazione in due incognite; pertanto è necessario scrivere un'altra equazione.

Equazione di equilibrio alla rotazione:

POLO A $\rightarrow +V_B \cdot (l) - Q \cdot (l + \frac{l}{2}) = 0$

$$V_B \cdot (l) - Q \cdot (\frac{3}{2}l) = 0$$

$$V_B \cdot l - Q \cdot (\frac{3}{2}l) = V_B \cdot l - ql \cdot (\frac{3}{2}l) = 0$$

$$V_B \cdot l - \frac{3}{2}ql^2 = 0 \rightarrow \boxed{V_B = \frac{3}{2}ql = \frac{3}{2}Q}$$

Sostituiamo il valore di \underline{V}_B , nell' equazione di equilibrio alla traslazione verticale, si ottiene:

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow -\underline{V}_A - \underline{V}_B + Q = 0$$

$$\underline{V}_A = Q - \underline{V}_B = Q - \frac{3}{2}Q = -\frac{1}{2}Q$$

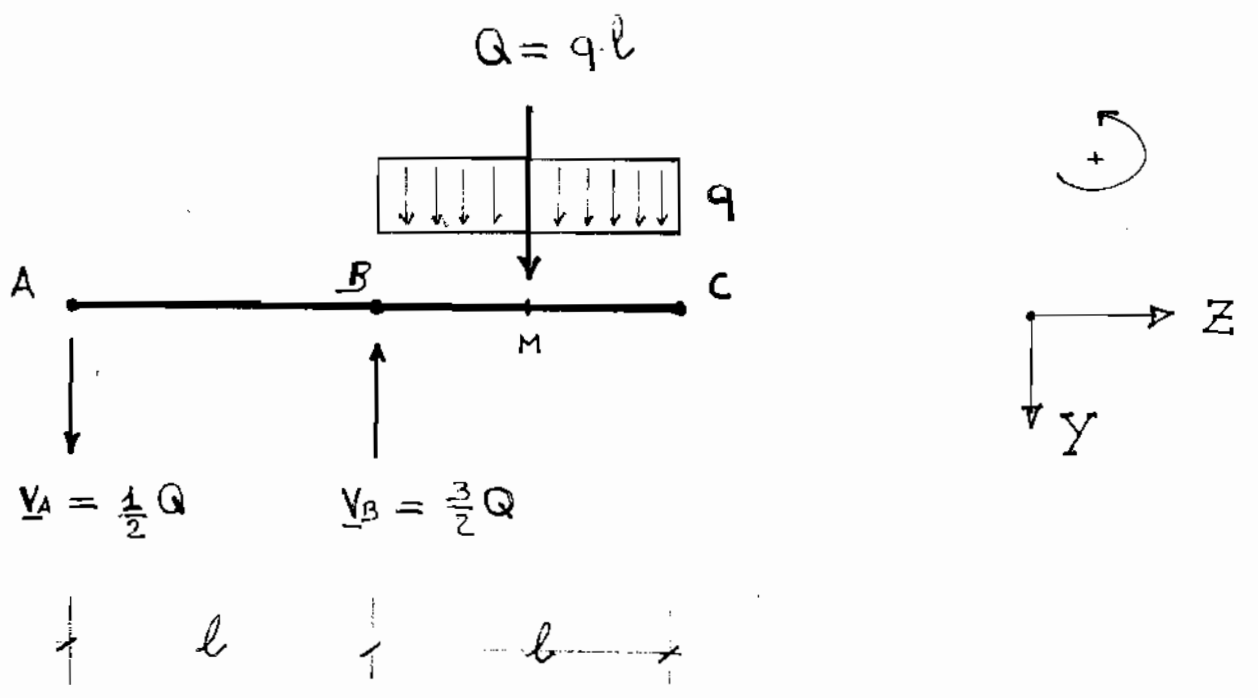
Ora, il segno negativo del risultato ci dice che la reazione vincolare \underline{V}_A è diretta lungo Y con verso discorde; il suo modulo è:

$|\underline{V}_A| = \frac{1}{2}Q$



SCHEMA STATICO

Ora che abbiamo determinato le 3 REAZIONI VINCOLARI, possiamo concludere l' ANALISI ESTERNA con il seguente schema statico:



ANALISI INTERNA

Ai fini del nostro problema (ossia determinare la deformazione elastica della trave), è necessario studiare il solo MOMENTO FLETTENTE, dovuto alle Forze Attive (esterne) e Reattive (vincolari).

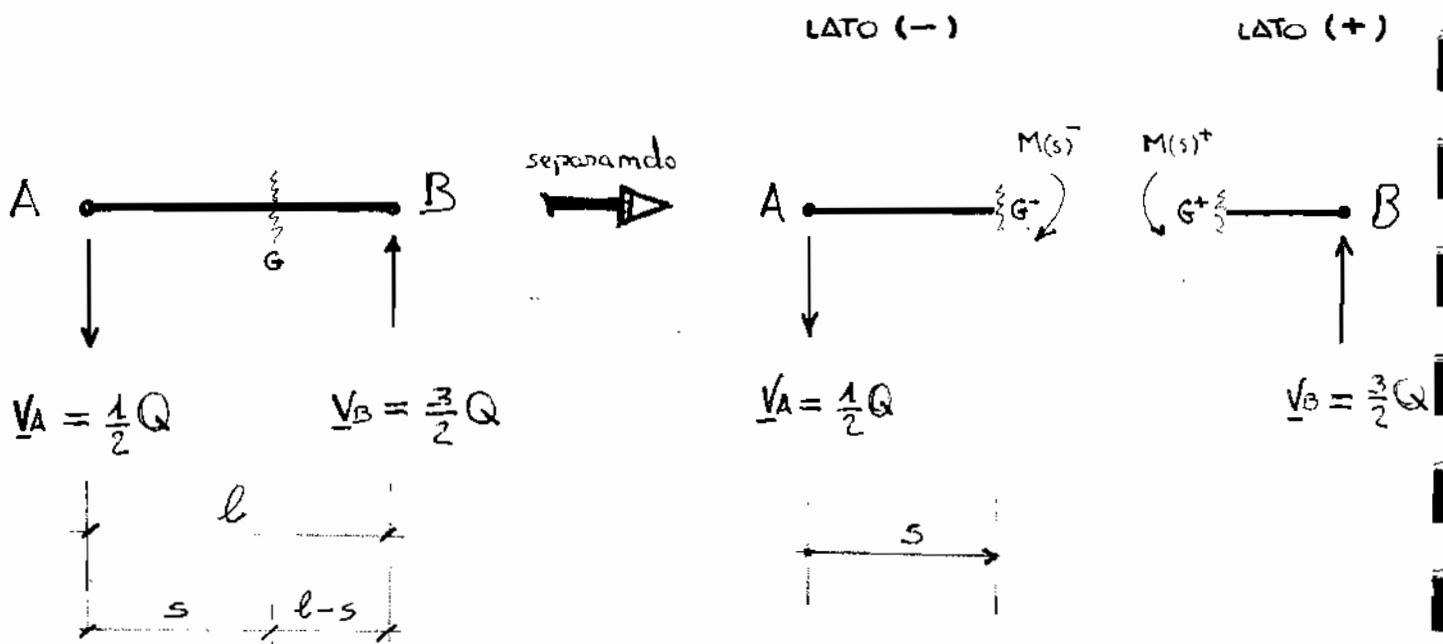
MOMENTO FLETTENTE

La trave è caratterizzata da due tratti, quello AB che non è soggetto a Forze Esterne (solo Reattive) e quello BC che è soggetto al carico ripartito q lungo tutto il tratto di luce l ;

partiamo con l'analisi interna del tratto AB -

TRATTO A-B ($0 \leq s \leq l$)

Sezioniamo il tratto AB in un generico punto G :



Osservando il LATO (-), ipotizziamo un MOMENTO FLETTENTE $M(s)^-$ nella sezione di taglio G^- , positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (tende le fibre di sotto), ricordando che questo momento è dovuto alla presenza di forze ortogonali alla trave (generano Taglio).

Pertanto, scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il lato (-), rispettando la CONVENZIONE DEI MOMENTI (rotazioni antiorarie positive):

$$\text{FOLO } G^- \rightarrow + M(s)^- + \underline{V}_A \cdot (s) = 0$$

$$M(s)^- = - \underline{V}_A \cdot s = - \frac{1}{2} Q \cdot s$$

Ora, facendo variare s fra 0 (in A) ed l (in B), si ottiene:

$$M(s)^- = - \frac{1}{2} Q \cdot s \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s)^- = 0 & (\text{in A}) \\ s=l \rightarrow M(s)^- = - \frac{1}{2} Q \cdot l = - \frac{1}{2} ql^2 & (\text{in B}) \end{cases}$$

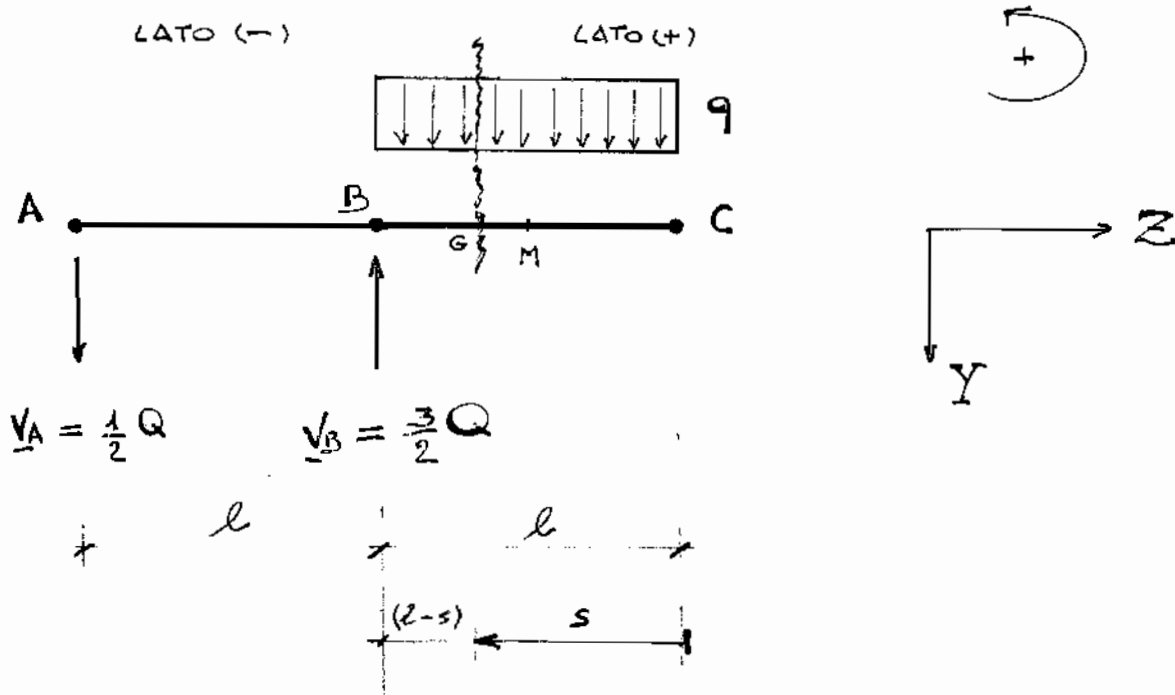
Il segno negativo del risultato ottenuto è direttamente quello da riportare nel diagramma del MOMENTO FLETTENTE; inoltre, smentisce l'ipotesi iniziale di $M(s)^-$ positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (senso di rotazione antiorario in G^-), che pertanto assumerà realmente un senso di rotazione orario in G^- e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, sarà un MOMENTO FLETTENTE NEGATIVO (tenderà le fibre superiori della trave, vedere grafico) -

Il diagramma del MOMENTO FLETTENTE NEGATIVO sarà definito da una legge lineare (in modulo $M(s)^- = \frac{1}{2} Q \cdot s$, con la variabile s di primo grado) e avrà un andamento rettilineo obliquo, che varierà da A a B, assumendo valori in modulo, rispettivamente, di 0 e $\frac{1}{2} Q \cdot l$ -

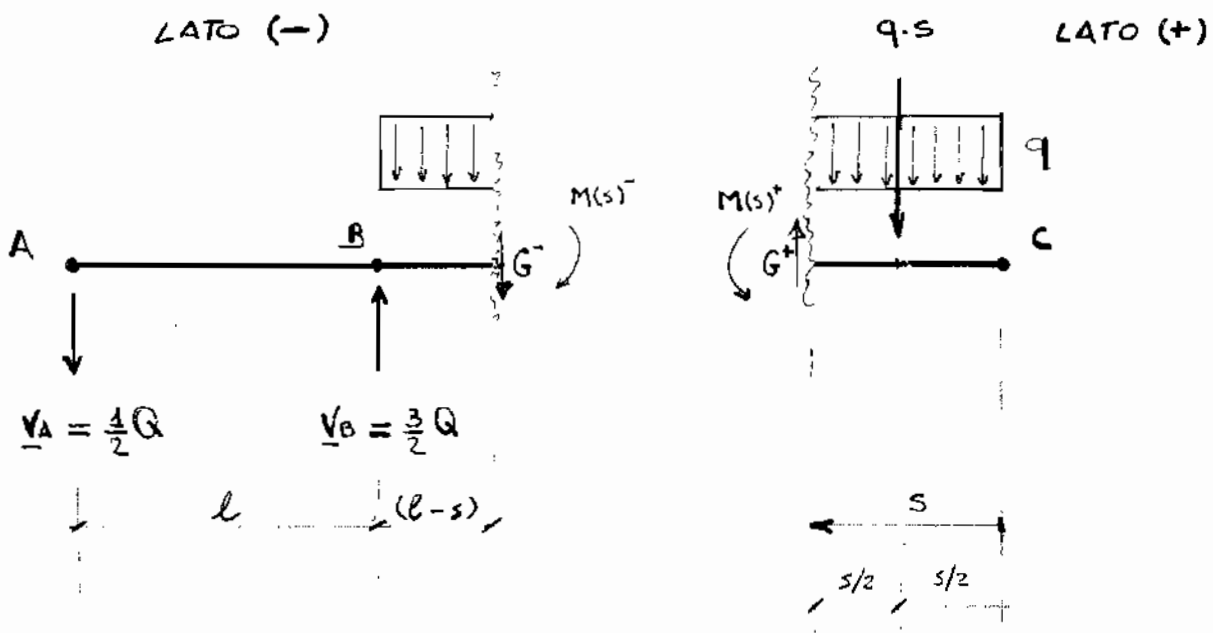


⑥ TRATTO C-B ($0 \leq s \leq l$) partendo C, andando in B ?

Sezioniamo ora il tratto C-B in un generico punto G, che sia prima o dopo la mezzeria M non ha importanza (in quanto l'andamento sarà parabolico) considerando il carico ripartito q :



Separando i due lati in corrispondenza della sezione G, si ha:



Ossevando il LATO (+), ipotizziamo un MOMENTO

FLETTENTE $M(s)^+$ nella sezione di taglio G^+ , positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (tende le fibre di sotto), ricordando che questo momento è dovuto alla presenza di forze ortogomali alle travi (che generano taglio) -

Pertanto, scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (+), rispettando la CONVENZIONE DEI MOMENTI (rotazioni antiorarie positive):

$$\text{FOLO } G^+ \rightarrow -M(s)^+ - q \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = 0$$

$$M(s)^+ = -\frac{1}{2} q s^2$$

Ora facendo variare s tra 0 (in C) ed l (in B), si ottiene:

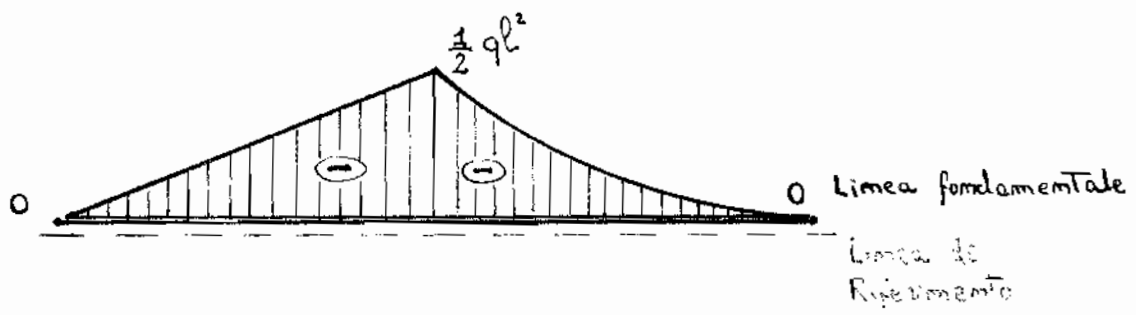
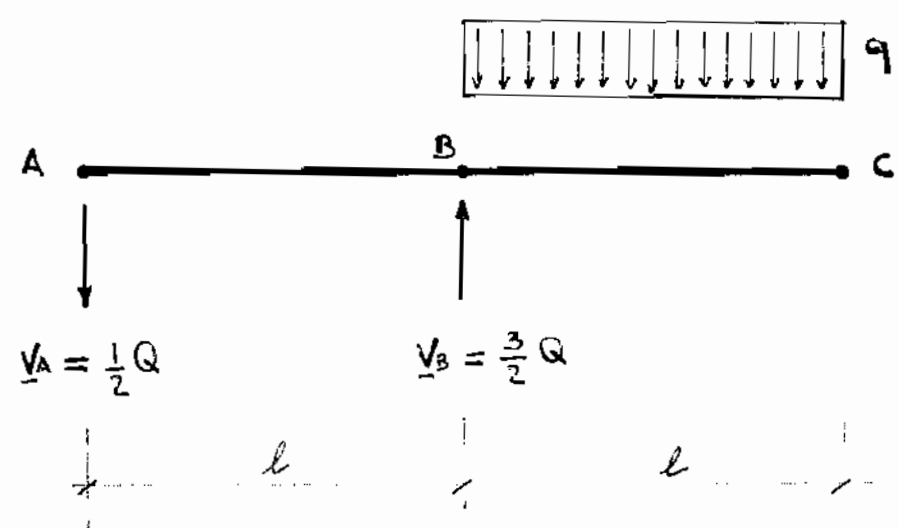
$$M(s)^+ = -\frac{1}{2} q s^2 \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s)^+ = 0 & (\text{estremo libero C}) \\ s=l \rightarrow M(s)^+ = -\frac{1}{2} q l^2 & (\text{in B}) \end{cases}$$

Il segno negativo del risultato ottenuto è direttamente quello da riportare nel diagramma del MOMENTO FLETTENTE; inoltre, smentisce l'ipotesi iniziale di $M(s)^+$ scelto positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (senso di rotazione orario in G^+), che pertanto assumerà realmente un senso di rotazione antiorario in G^+ e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, sarà un MOMENTO FLETTENTE NEGATIVO (tenderà le fibre superiori della trave, vedere grafico) -

Il diagramma del MOMENTO FLETTENTE NEGATIVO sarà definito in questo tratto da una LEGGE QUADRATICA (in modulo $M(s) = \frac{1}{2} q s^2$ con la variabile s di secondo grado) e avrà un andamento parabolico, che varierà da C a B, assumendo valori in modulo, rispettivamente, di 0 e $\frac{1}{2} q l^2$ (coincide con quello ottenuto in B per il tratto AB) -

8 DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE :

Partendo dallo SCHEMA STATICO, diagrammiamo i risultati ottenuti dall' ANALISI INTERNA della Trave, considerando la LINEA di RIFERIMENTO (per i segni dei risultati) al di sotto della LINEA FONDAMENTALE, ossia :



Ora che conosciamo la statica dell'assegnato SISTEMA ISOSTATICO, vediamo come essa si deforma a causa delle forze vi è soggetto;

quindi l'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE consiste nell'andare ad analizzare la deformazione elastica della trave, determinando così le incognite richieste dal problema, il tutto attraverso l'applicazione del seguente principio:

TEOREMA DI MOHR

Il TEOREMA DI MOHR consiste nell'associare una TRAVE AUSILIARIA (*) alla TRAVE REALE assegnata (quella di partenza); in particolare il principio prevede, come prima operazione, l'associazione di VINCOLI AUSILIARI (*) ai VINCOLI REALI presenti nella trave reale assegnata, come segue:

- ad APPOGGIO - CERNIERA estremo \longrightarrow APPOGGIO - CERNIERA (*)
- a CARRELLO - CERNIERA interno \longrightarrow CERNIERA INTERNA (*)
- a CARRELLO - CERNIERA estremo \longrightarrow APPOGGIO o CARRELLO (*), indifferente.
- all' ESTREMO LIBERO \longrightarrow INCASTRO (*)
- all' INCASTRO \longrightarrow ESTREMO LIBERO (*)

Una volta fatta quest'associazione, il principio prevede come seconda operazione, il caricare, superiormente (ossia sormontare) la TRAVE AUSILIARIA con il diagramma del MOMENTO FLETTEnte (che è negativo) della TRAVE REALE assegnata; in particolare, il diagramma del momento flettente, conserva il suo segno e:

- 1) se il segno del momento flettente è positivo, allora il carico che sormonta la trave Ausiliaria, PUNTA IN BASSO;
- 2) se il segno del momento flettente è negativo, allora il carico che sormonta la trave Ausiliaria, PUNTA IN ALTO -

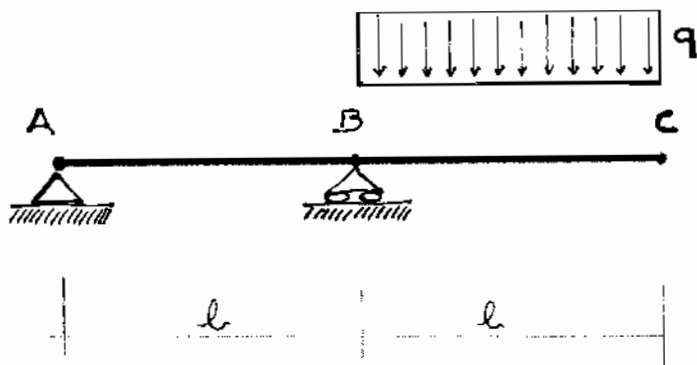
(10)

Nel nostro caso si ha:

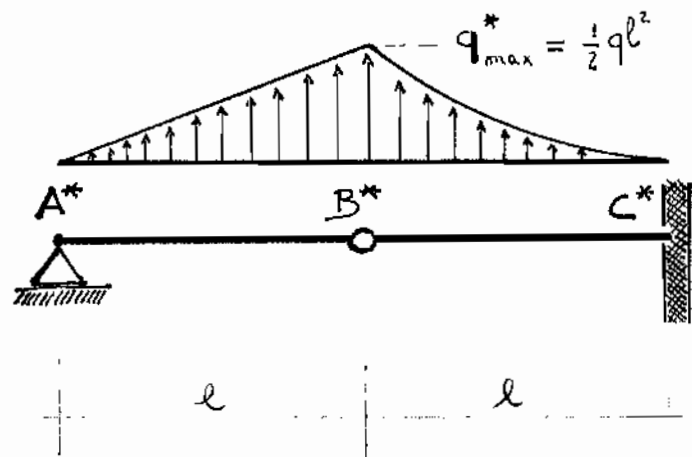
- all' APPOGGIO - CERNIERA in A \rightarrow APPOGGIO - CERNIERA A^*
- al CARRELLO - CERNIERA in B \rightarrow CERNIERA INTERNA B^*
- all' ESTREMO LIBERO in C \rightarrow INCASTRO C^*

ed essendo il diagramma del momento flettente negativo lungo tutta la trave reale, caricherà superiormente la TRAVE AUSILIARIA puntando verso l'alto, ossia:

TRAVE REALE



TRAVE AUSILIARIA



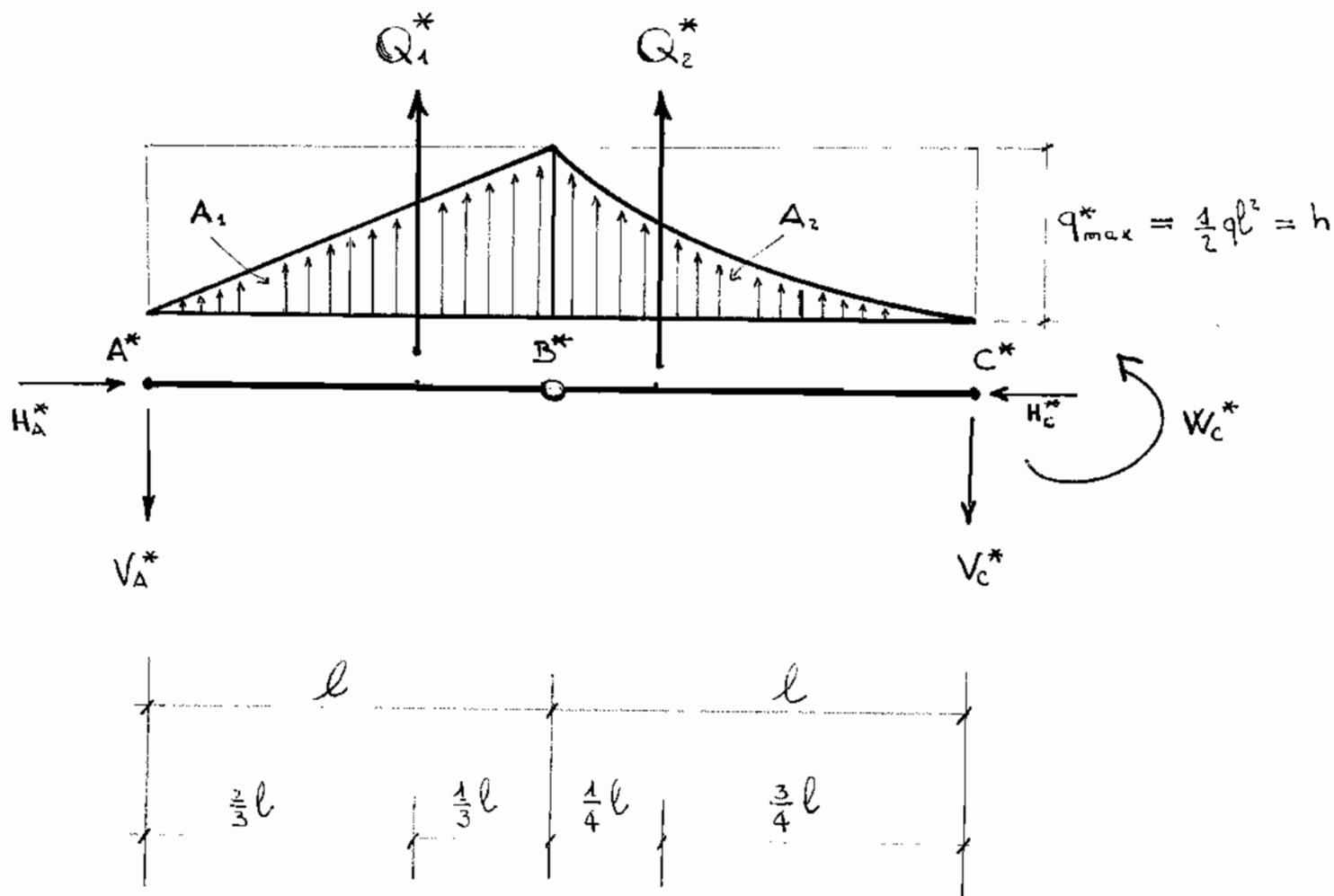
Ora è come se ci troviamo punto a capo, ossia la traccia assegnata dal problema è la TRAVE AUSILIARIA, della quale conosciamo il valore massimo del carico che la sovrasta (in corrispondenza della cerniera interna B^*), spingendo dal basso verso l'alto (segno negativo del momento flettente nella Trave Reale).

Quello che dobbiamo fare, è determinare per prima cosa lo SCHEMA STATICO AUSILIARIO della Trave Ausiliaria, andando a svolgere un' ANALISI ESTERNA di essa;

ricordiamo che, l' APPOGGIO - CERNIERA (in A^*) impedisce traslazione verticale ed orizzontale (ossia 2 vincoli), poi la CERNIERA INTERNA (in B^*) non impedisce nessun moto, infine l' INCASTRO (in C^*) impedisce tutti e 3 i moti possibili che la trave può avere nel piano, ossia trasl. verticale, orizzontale e rotazione.

SCHEMA STATICO AUSILIARIO

Pertanto, sostituiamo ai VINCOLI AUSILIARI (A^* , C^*) (11) le rispettive REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE, appostando al posto del CARICO RIPARTITO q^* , le risultanti Q_1^* (tratto A^*-B^*) e Q_2^* (tratto B^*-C^*) dovute a considerazioni di GEOMETRIA DESCRITTIVA (Baricentri, Aree), come segue:



Notiamo subito che, per l'equilibrio alla traslazione orizzontale, le due REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE H_A^* e H_C^* , sono nulle in quanto non ci sono forze esterne attive che agiscono in direzione longitudinale alla Trave ausiliaria, tali da generare reazioni -

Pertanto, le incognite di questo schema statico, sono le REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE V_A^* , V_C^* , W_C^* che determineremo successivamente attraverso l'ANALISI ESTERNA.

12 CARICHI CONCENTRATI AUSILIARI

I due carichi concentrati ausiliari Q_1^* e Q_2^* , considerati rispettivamente come risultante del carico ripartito q^* nel tratto A^*-B^* e nel tratto B^*-C^* , rappresentiamo rispettivamente l'area A_1 e A_2 del triangolo rettangolo ($A = \frac{1}{2} b \times h$) e del settore parabolico ($A = \frac{1}{3} b \times h$), entrambi inscritti in rettangoli di base l ed altezza $h = q_{\max}^* = \frac{1}{2} q l^2$ -

Pertanto, si ha :

$$Q_1^* = A_1 = \frac{1}{2} b \times h = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} q l^2 \right) = \frac{1}{4} q l^3$$

$Q_1^* = A_1 = \frac{1}{4} q l^3$	CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO TRATTO A^*-B^* ovvero, AREA TRIANGOLO RETTANGOLO
-----------------------------------	--

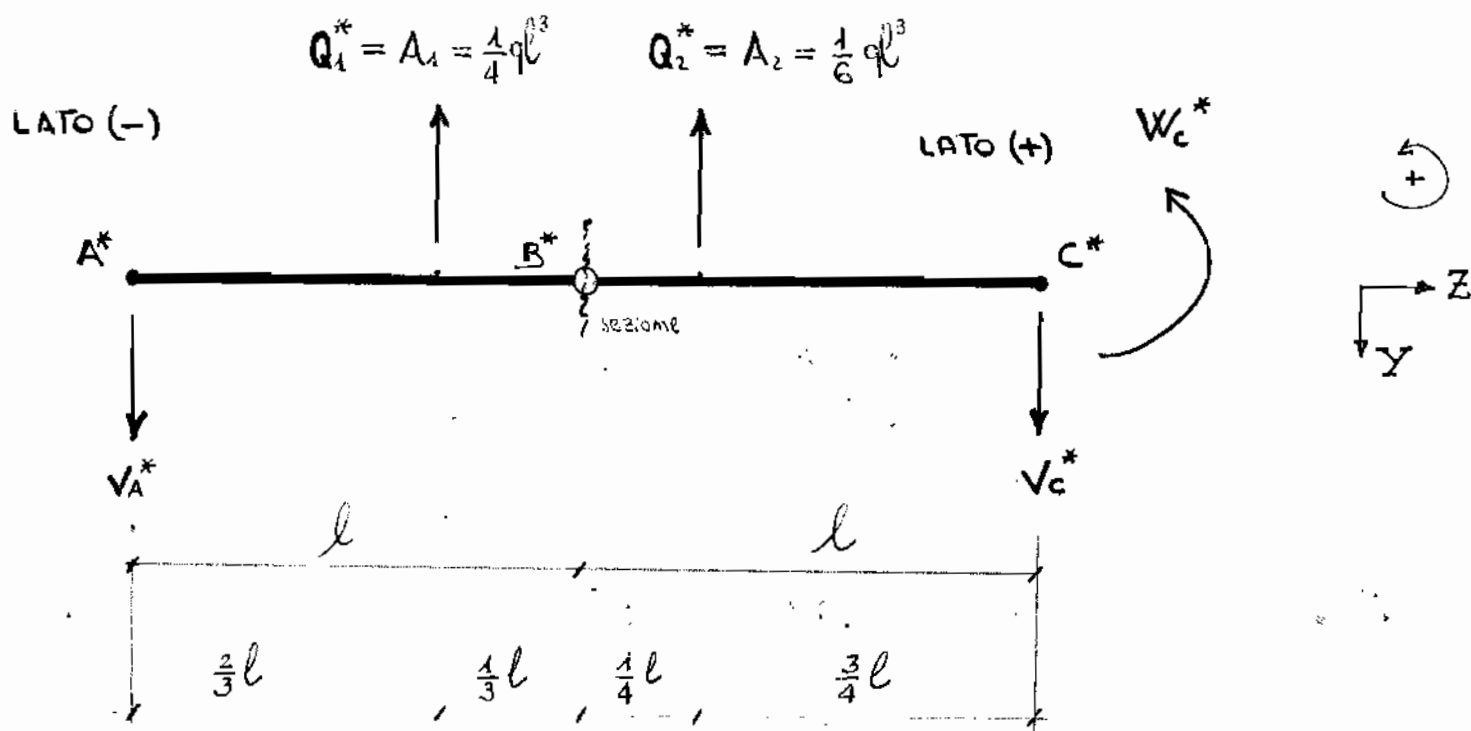
e poi abbiamo :

$$Q_2^* = A_2 = \frac{1}{3} b \times h = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} q l^2 \right) = \frac{1}{6} q l^3$$

$Q_2^* = A_2 = \frac{1}{6} q l^3$	CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO TRATTO B^*-C^* ovvero, AREA SETTORE PARABOLICO
-----------------------------------	--

Per considerazioni di GEOMETRIA DESCRITTIVA (delle figure piane), è facile concludere che, questi due carichi concentrati ausiliari Q_1^* e Q_2^* sono applicati nel baricentro delle rispettive aree A_1 e A_2 -

In base alle considerazioni fatte e ai risultati ottenuti, lo SCHEMA STATICO AUSILIARIO precedente (pag 11) assume la seguente forma più semplice e sintetica da leggere :



Ora che conosciamo i due CARICHI CONCENTRATI AUSILIARI Q_1^* e Q_2^* , ci resta da determinare le tre REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE

V_A^* , V_C^* , W_C^* incognite ;

a tal proposito, scriviamo l'equazione di equilibrio alla Traslazione verticale :

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow V_A^* + V_C^* - Q_1^* - Q_2^* = 0$$

Abbiamo un'equazione in due incognite, insolubile -

Impoemodo la condizione che il MOMENTE FLETTENTE si annulli nella CERNIERA INTERNA B^* , scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione :

$$\text{POLO } B^* \rightarrow M_B^* = V_A^* \cdot l - Q_1^* \cdot \frac{1}{3}l + Q_2^* \cdot \frac{1}{4}l - V_C^* \cdot l + W_C^* = 0$$

Abbiamo un'equazione in 3 incognite, insolubile -

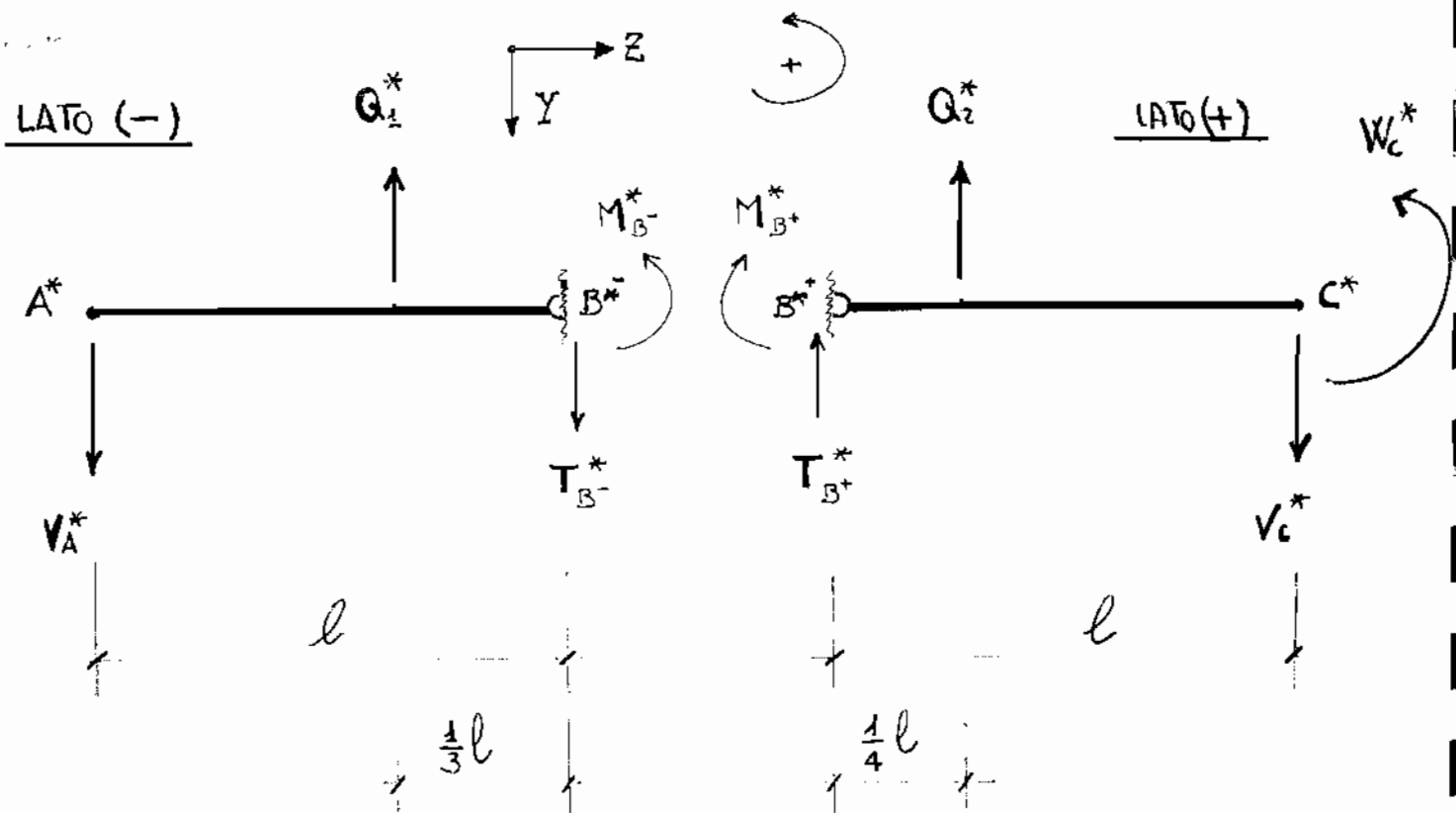
Si come con l'ANALISI ESTERNA non è possibile determinare le incognite del sistema, facciamo un' ANALISI INTERNA

sezionando la trave in corrispondenza della CERNIERA

INTERNA B^* ed imponendo la condizione $M_B^* = 0$

Pertanto dallo SCHEMA STATICO AUSILIARE precedente,

separiamo i due lati apportando in sezione B^* le opportune reazioni dovute all'aver sezionato la trave, ossia TAGLIO e MOMENTO FLETTENTE (nullo), come segue:



dove abbiamo scelto un TAGLIO T^* positivo per la CONVENZIONE DEL CONCIO (rotazione oraria del concio di trave in sezione, taglio positivo), ed un MOMENTO FLETTENTE M^* (da imporre nullo) positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (se le fibre della trave sono tese dalla parte di sotto, allora Momento flettente positivo), ma che deve rispettare la seguente condizione dovuta alla CERNIERA INTERNA B^* , ossia:

$$M_{B^-}^* = 0 = M_{B^+}^*$$

Ora è possibile determinare l'equilibrio di entrambi i lati:

scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il lato (-):

$$\underline{M_{B^-}^* = 0}$$

$$\text{Polo } B^{*-} \rightarrow +V_A^* \cdot l - Q_1^* \cdot \frac{1}{3}l = 0$$

$$V_A^* \cdot l = Q_1^* \cdot \frac{1}{3}l = \left(\frac{1}{4}ql^3\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$V_A^* = \frac{1}{12} ql^3$ REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA in A^* concorde con asse Y che genera un taglio negativo, quindi rotazione antioraria.

Conoscendo la Reazione Vincolare Ausiliaria in A^* , possiamo determinare il taglio $T_{B^-}^*$ scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale per il lato (-):

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow +T_{B^-}^* + V_A^* - Q_1^* = 0$$

dove il taglio è stato scelto convenzionalmente positivo ed è tale da risultare concorde con l'asse Y .

$$T_{B^-}^* = Q_1^* - V_A^* = \frac{1}{4} ql^3 - \frac{1}{12} ql^3 = \frac{1}{6} ql^3$$

$T_{B^-}^* = \frac{1}{6} ql^3$ TAGLIO AUSILIARIO POSITIVO in B^{*-} che genera rotazione antioraria.

Il segno positivo del risultato, conferma la scelta di $T_{B^-}^*$ che dovrà effettivamente essere concorde con l'asse Y nella sezione B^{*-} , mentre discorde in B^{*+} per via del fatto che $T_{B^-}^*$ e $T_{B^+}^*$ devono essere uguali in modulo, ma opposti in verso (TEOREMA di EULERO per le sezioni); quindi si avrà:

$T_{B^+}^* = \frac{1}{6} ql^3$ TAGLIO AUSILIARIO POSITIVO in B^{*+} che genera rotazione antioraria.

Infatti, per l'equilibrio alla traslazione verticale del LATO (+), è possibile determinare la REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA V_C^* , sostituendo il valore del taglio ausiliario $T_{B^+}^*$ nella seguente equazione di equilibrio:

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow -T_{B^+}^* - Q_2^* + V_C^* = 0$$

$$V_C^* = T_{B^+}^* + Q_2^* = \frac{1}{6}ql^3 + \frac{1}{6}ql^3 = \frac{1}{3}ql^3$$

$$V_C^* = \frac{1}{3}ql^3$$

REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA in C^* coincide con asse Y che genera un taglio positivo, quindi rotazione f oraria -

Infine, per l'equilibrio alla rotazione del LATO (+), ci resta solo da determinare la COPPIA REATTIVA AUSILIARIA W_C^* dovuta alla presenza dell'INCASTRO (vincolo ausiliario) in C^* , che si ottiene attraverso la seguente equazione di equilibrio:

$$\underline{M_{B^+}^* = 0}$$

$$\text{POLO } B^+ \rightarrow W_C^* + Q_2^* \cdot \frac{1}{4}l - V_C^* \cdot l = 0$$

$$W_C^* = V_C^* \cdot l - Q_2^* \cdot \frac{1}{4}l$$

$$W_C^* = \left(\frac{1}{3}ql^3\right) \cdot l - \left(\frac{1}{6}ql^3\right) \cdot \frac{1}{4}l = \frac{1}{3}ql^4 - \frac{1}{24}ql^4$$

$$W_C^* = \frac{7}{24}ql^4$$

COPPIA REATTIVA AUSILIARIA in C^*

Il risultato positivo conferma il senso di rotazione antiorario scelto arbitrariamente nello SCHEMA STATICO AUSILIARIO -

Conoscendo le REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE V_A^* , V_C^* ed il TAGLIO AUSILIARIO $T_{B^-}^*$ e $T_{B^+}^*$ in corrispondenza della CERNIERA INTERNA B^* , ed inoltre, tenendo conto della DEFORMAZIONE ELASTICA ($1/E \cdot J$) a cui è soggetta la TRAVE REALE per via del carico ripartito q (tratto BC) con le sue rispettive reazioni vincolari V_A , V_B , è possibile determinare gli ANGOLI DELLA DEFORMAZIONE γ_A , γ_{B^-} , γ_{B^+} , γ_C nei rispettivi punti A, B⁻, B⁺, C della TRAVE REALE +
 In generale :

$$\gamma = \frac{V^*}{E \cdot J}$$

dove $V^* \rightarrow$ Reazione Vincolare Ausiliaria ;
 $E \rightarrow$ Modulo di Young (o modulo di Elasticità) ;
 $J \rightarrow$ Momento di Inerzia ;

e dove γ rappresenta la ROTAZIONE angolare della TRAVE REALE rispetto alla sua posizione iniziale ;

ricordiamo che per gli angoli si sceglie ROTAZIONE ORARIA POSITIVA e coincide proprio con la CONVENZIONE DEL TAGLIO (rotazione oraria del comico di trave in una sua generica sezione, allora Taglio Positivo) -

Nel nostro caso, si ha :

$$\gamma_A = \frac{V_A^*}{E \cdot J} = V_A^* \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{12} q l^3 \right) \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{1}{12} \frac{q l^3}{E \cdot J}$$

con V_A^* che genera un TAGLIO NEGATIVO, si ha rotazione antioraria, quindi γ_A negativo, ossia :

$$\gamma_A = - \frac{1}{12} \frac{q l^3}{E \cdot J}$$

ANGOLO DI DEFORMAZIONE in A
 che genera rotazione antioraria -

Siccome la REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA V_A^* (vedere pag 14) genera un TAGLIO NEGATIVO (in quanto genera una rotazione antioraria del comico di trave nella sezione A^{*}), allora l' ANGOLO DI DEFORMAZIONE in A nella TRAVE REALE, assume lo stesso segno ed è tale da imbarcare la Trave reale verso l'alto dalla parte di sopra.

Stesso discorso vale per i restanti ANGOLI di DEFORMAZIONE, ed infatti si avrà:

$$\gamma_{B^-} = \frac{T_{B^-}^*}{E \cdot J} = T_{B^-}^* \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{6} q l^3 \right) \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{1}{6} \frac{q l^3}{E \cdot J}$$

con $T_{B^-}^*$ che è proprio il TAGLIO AUSILIARIO POSITIVO in B^- , si ha rotazione oraria, quindi ANGOLO di DEFORMAZIONE γ_{B^-} positivo, ossia:

$$\boxed{\gamma_{B^-} = + \frac{1}{6} \cdot \frac{q l^3}{E \cdot J}} \quad \text{ANGOLO di DEFORMAZIONE in } B^- \text{ che genera rotazione oraria.}$$

ed è tale da imbarcare la trave verso l'alto, da sopra. Stesso vale per:

$$\gamma_{B^+} = \frac{T_{B^+}^*}{E \cdot J} = T_{B^+}^* \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{6} \frac{q l^3}{E \cdot J} \right) \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{1}{6} \cdot \frac{q l^3}{E \cdot J}$$

con $T_{B^+}^*$ che è proprio il TAGLIO AUSILIARIO POSITIVO in B^+ , si ha rotazione oraria, quindi ANGOLO di DEFORMAZIONE γ_{B^+} positivo, ossia:

$$\boxed{\gamma_{B^+} = + \frac{1}{6} \cdot \frac{q l^3}{E \cdot J}} \quad \text{ANGOLO di DEFORMAZIONE in } B^+ \text{ che genera rotazione oraria.}$$

continuando ad imbarcare la trave verso l'alto, ma questa volta la configurazione è dalla parte di sotto.

Infine abbiamo:

$$\gamma_C = \frac{V_C^*}{E \cdot J} = V_C^* \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{3} q l^3 \right) \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{1}{3} \frac{q l^3}{E \cdot J}$$

con V_C^* che genera un TAGLIO POSITIVO, si ha rotazione oraria, quindi ANGOLO di DEFORMAZIONE γ_C positivo, ossia:

$$\boxed{\gamma_C = + \frac{1}{3} \cdot \frac{q l^3}{E \cdot J}} \quad \text{ANGOLO di DEFORMAZIONE in } C \text{ che genera rotazione oraria.}$$

continuando ad imbarcare la trave verso l'alto ed ancora configurazione dalla parte di sotto.

ABBASSAMENTO : Freccia Massima

19

Calcolare l'ABBASSAMENTO ed in particolare la FRECCIA MASSIMA, significa determinare il massimo spostamento verticale della TRAVE REALE dovuto alle sollecitazioni (attive e reattive) cui la trave è soggetta -

In generale l'ABBASSAMENTO è dato da :

$$f = \frac{M^*}{E \cdot J} \quad \text{FRECCIA GENERALE (in un generico punto)}$$

dove M^* è il momento Ausiliario in quel generico punto -

In particolare, stiamo cercando la FRECCIA MASSIMA che è data da

$$f_{\max} = \frac{M_{\max}^*}{E \cdot J} \quad \text{FRECCIA MASSIMA GENERALE}$$

dove M_{\max}^* è il momento Ausiliario Massimo in quella particolare sezione di trave dove si verifica il massimo spostamento verticale ;

nel nostro caso, questa particolare sezione è il punto C^* dove abbiamo trovato :

$$W_C^* = \frac{7}{24} \cdot ql^4 \quad \text{COPPIA REATTIVA AUSILIARIA in } C^*$$

che risulta proprio essere il momento Ausiliario Massimo, ossia :

$$M_{\max}^* = \frac{7}{24} ql^4 \quad \text{MOMENTO AUSILIARIO MASSIMO}$$

da cui si ha :

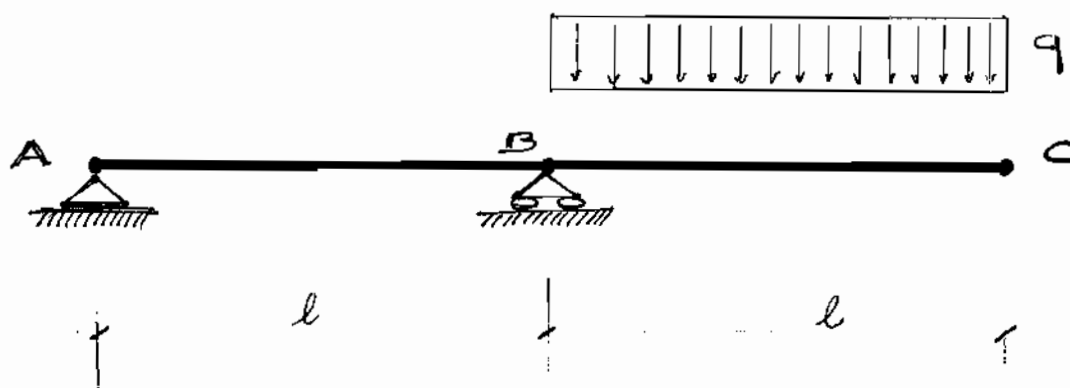
$$f_{\max} = \frac{M_{\max}^*}{E \cdot J} = M_{\max}^* \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \left(\frac{7}{24} ql^4 \right) \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{7}{24} \frac{ql^4}{E \cdot J}$$

$$\text{ossia } f_{\max} = \frac{7}{24} \cdot \frac{ql^4}{E \cdot J} \quad \text{FRECCIA MASSIMA}$$

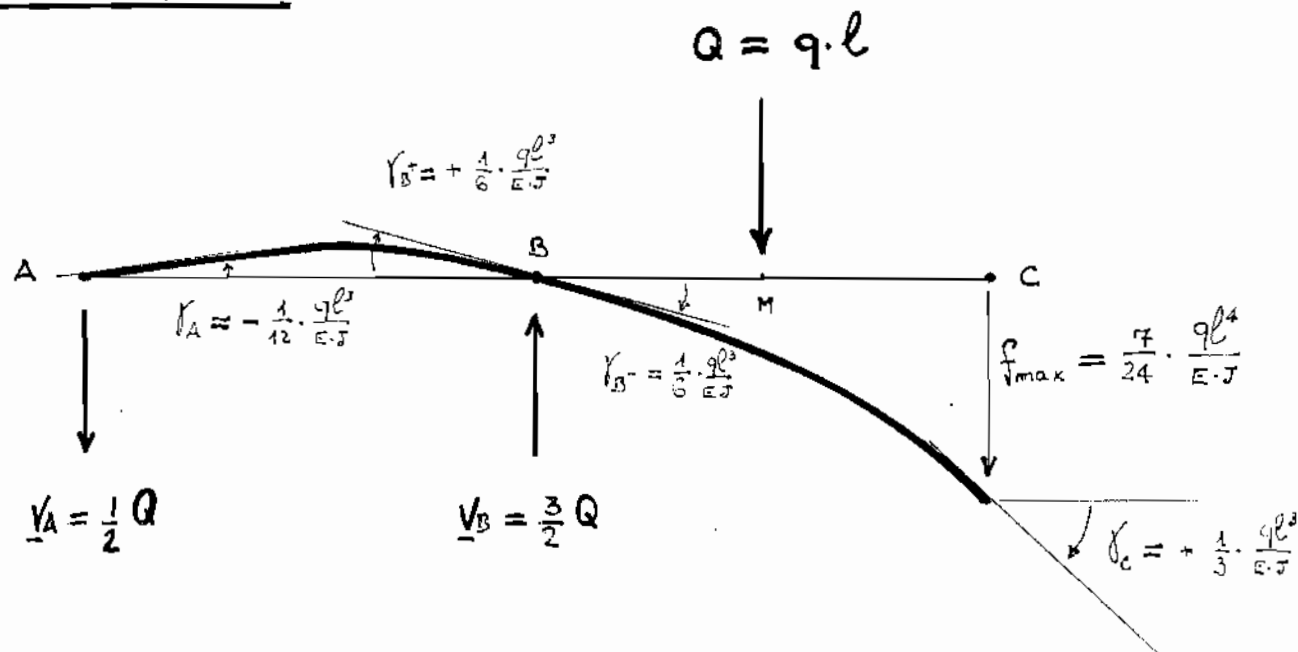
che rappresenta il massimo spostamento verticale (abbassamento) della trave reale nel punto C , rispetto alla sua posizione iniziale.

DEFORMATA REALE

Sulla base dei risultati ottenuti attraverso l'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE con relativa applicazione del TEOREMA DI MOHR (analisi della Trave Ausiliaria), andiamo a rappresentare graficamente l'andamento della DEFORMATA REALE relativa alla trave reale assegnata :

TRAVE REALE ASSEGNATA

da cui, facendo riferimento al suo SCHEMA STATICO REALE (a pag. 3) con l'aggiunta dei risultati ottenuti dall'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE (Angoli di deformazione γ e flecia massima), si ha :

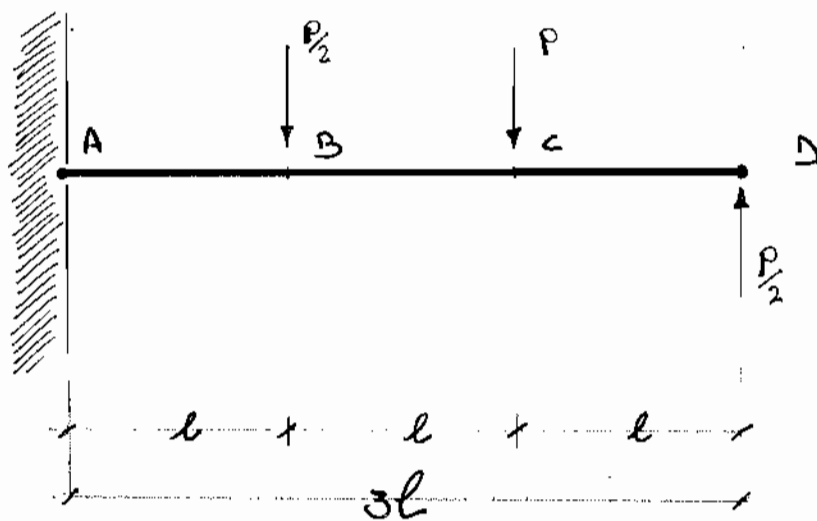
TRAVE REALE DEFORMATA

ESERCIZIO

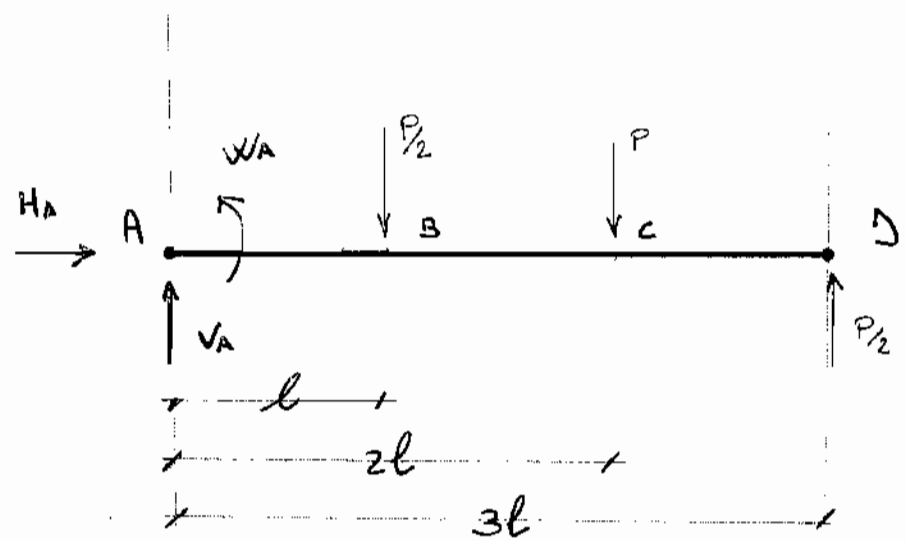
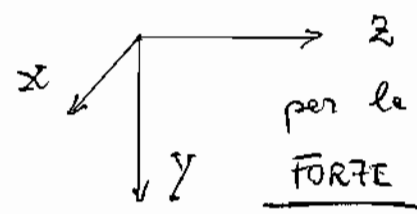
Mensola con 3 carichi concentrati

1

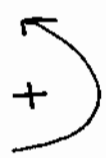
dell'ESERCITAZIONE



ANALISI ESTERNA



Per i MOMENTI



W_A lo abbiamo scelto convenzionalmente antiorario; stesso vale per H_A e V_A

(2)

Equazione di Equilibrio alla Trasl. verticale ;

$$\frac{P}{2} + P - \frac{P}{2} - V_A = 0$$

$$P - V_A = 0$$

$V_A = P$ ed ha verso che punta in A dal basso verso l'alto ;

Equazione di Equilibrio alle trasl. orizzontale :

$$H_A = 0$$

non essendoci altre forze esterne (o attive) applicate in direzione longitudinale alla Trave ;

Equilibrio ~~to~~ dei momenti alla rotazione :

$$+ \underline{W_A} - \frac{P}{2} \cdot (l) - P \cdot (2l) + \frac{P}{2} \cdot (3l) = 0$$

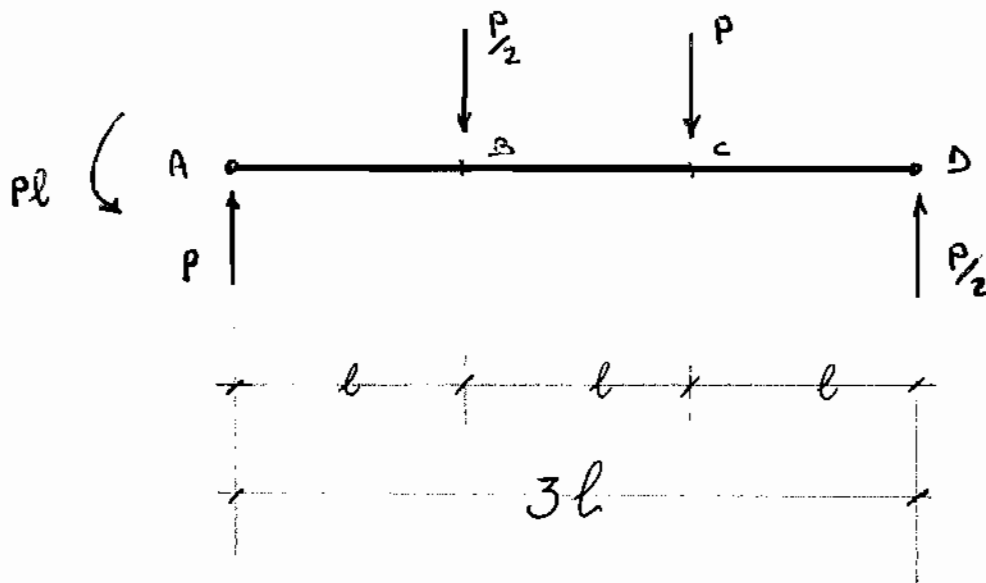
$$+ W_A - \frac{Pl}{2} - 2Pl + \frac{3Pl}{2} = 0$$

$$+ W_A - Pl \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$W_A - Pl = 0$$

$$W_A = Pl$$

essendo positivo conferma la rotazione antioraria ;



ANALISI INTERNA

Si vede subito che, non essendoci nessuna forza applicata longitudinalmente alle Trave (di Trazione o di compressione), allora lo Sforzo Normale (N) è nullo:

$$N = 0$$

è pertanto il diagramma sarà un linee orizzontale coincidente con la linee Fondamentale;

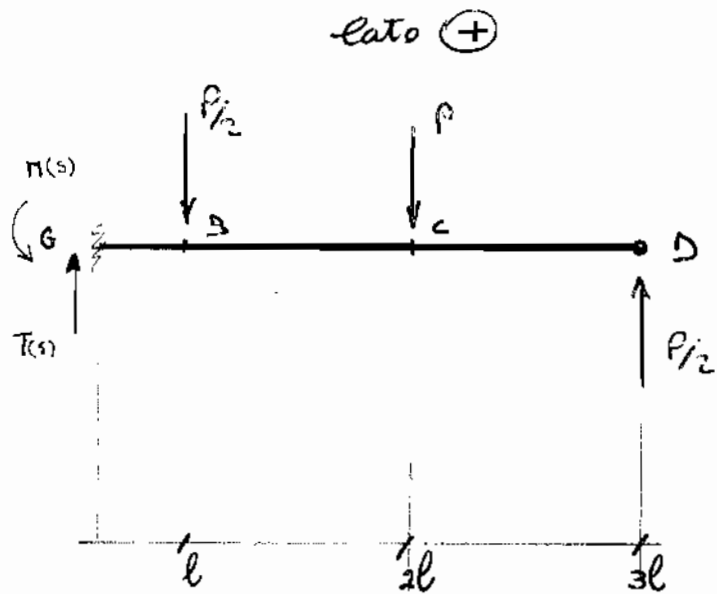
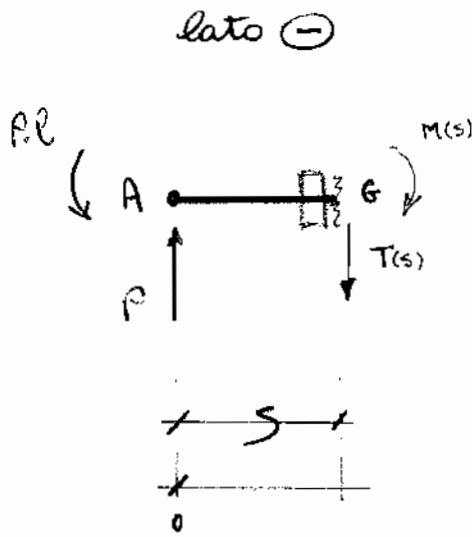
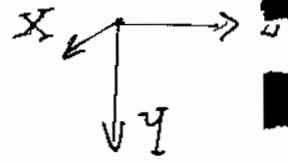
④

Taglio

④

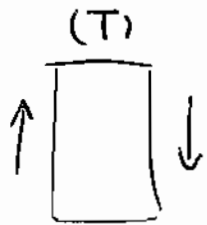
caso tra A e B

$$0 \leq s \leq l$$



Guardiamo il lato (-);

Per contrastare la forza P in A, il taglio sarà diretto verticalmente verso il basso e per la CONVENZIONE DEL TAGLIO:



rotazione oraria,
taglio positivo.

sarà un Taglio Positivo;

l'equazione alle trasl. verticali sarà:

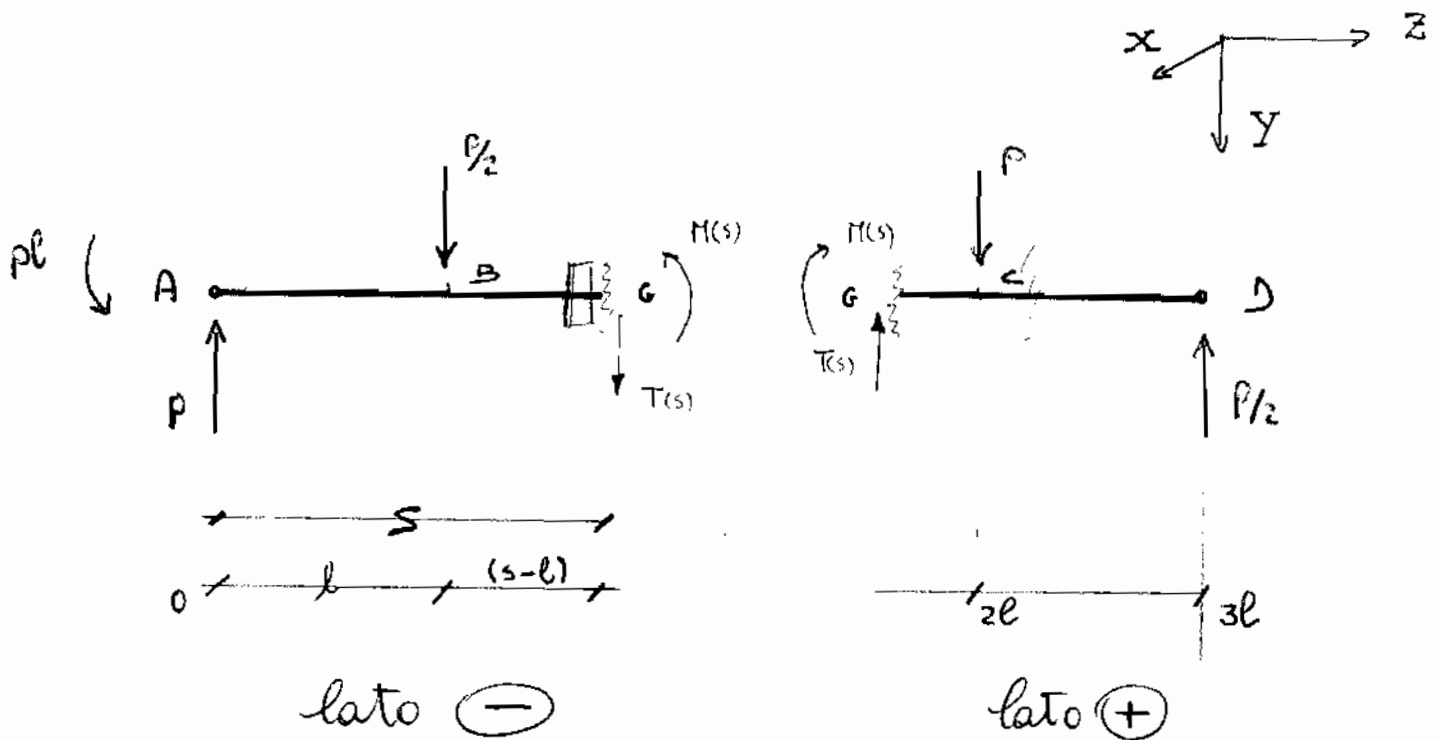
$$+T(s) - P = 0$$

$T(s) = +P$ è confermato il taglio positivo che dà una rotazione oraria al cuneo in G.

ossia un andamento lineare positivo, costante nel tratto da A a B, ossia nel caso $0 \leq s \leq l$

Taglio : caso $l \leq s \leq 2l$ (tra B e C)

(5)



Guardiamo il lato \ominus :

Prendiamo il Taglio $T(s)$ per convenzione verso il basso che dà una rotazione oraria al cuneo in G ; pertanto abbiamo la seguente equazione di equilibrio alle Trasl. verticale :

$$+ T(s) + P/2 - P = 0$$

$$+ T(s) = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

quindi

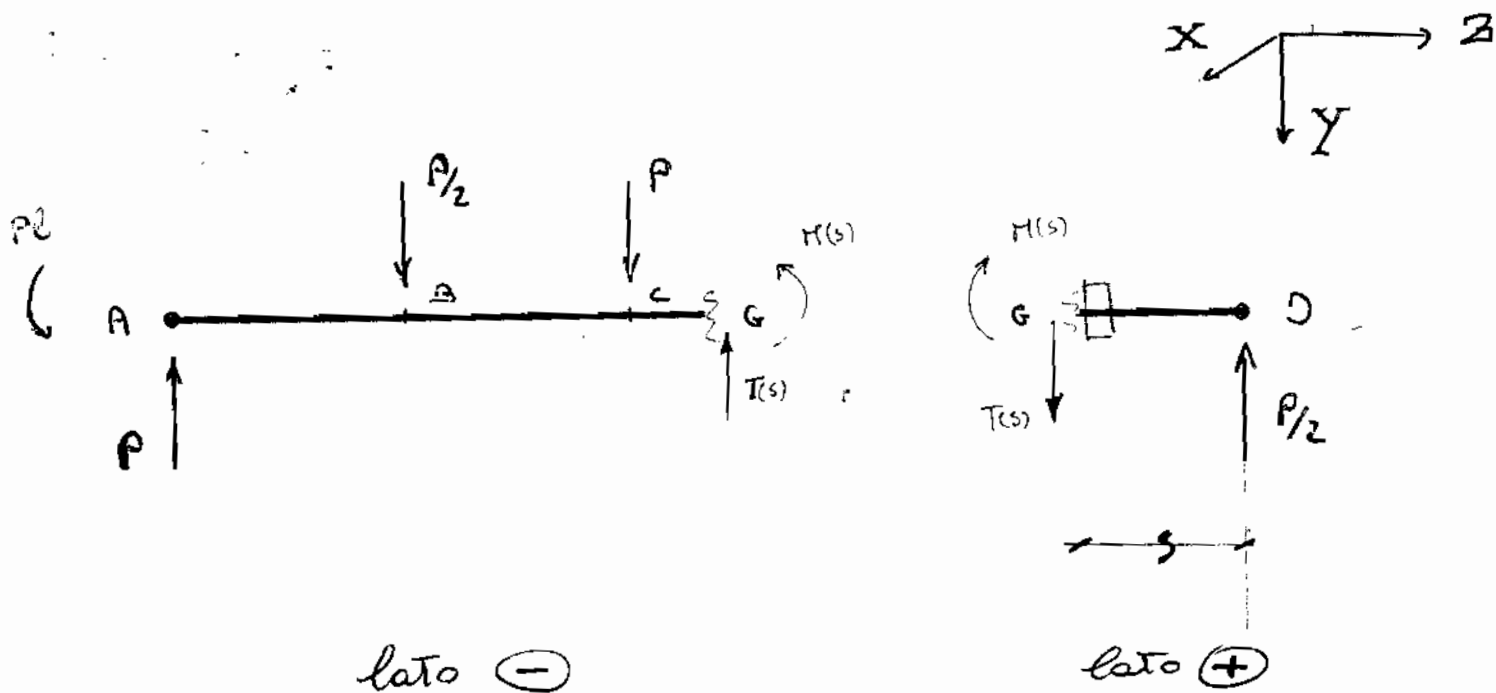
$$T(s) = + \frac{P}{2}$$

è confermato il taglio positivo che dà rotazione oraria al cuneo in G.

ossia il Taglio T ha un andamento ~~o~~ linearmente positivo, costante in modulo ($P/2$) nel tratto da B a C ($l \leq s \leq 2l$)

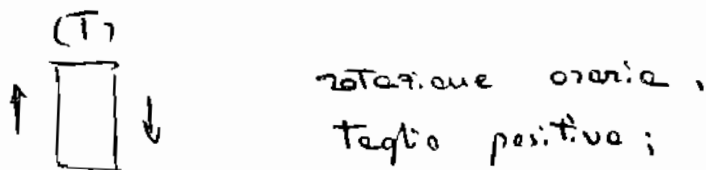
Pertanto, siccome tra A e B il taglio è costante in modulo ~~o~~ e vale (P), essendo invece tra B e C costante in modulo di valore ($P/2$), vuol dire che in B abbiamo un salto del Taglio da P a $P/2$ -

⑥ Taglio : caso $0 \leq s \leq l$ (tra D e C)



Guardiamo il lato (+) :

Per contrastare la forza $P/2$ in D è necessario considerare un Taglio $T(s)$ verso il basso per contrastare tale forza ; per la CONVENZIONE DEL TAGLIO :



nel nostro caso, $T(s)$ sarà un Taglio negativo che dà una rotazione antioraria al cuneo in G ~~il risultato è~~ l'equilibrio ~~alle trasl.~~ alle trasl. verticali sarà :

$$+ T(s) - P/2 = 0$$

$$+ T(s) = + P/2$$

ma siccome per la convenzione del Taglio abbiamo detto che è un Taglio negativo, allora il risultato è :

$$T(s) = - \frac{P}{2}$$

andamento linearmente negativo, costante in modulo di valore $P/2$ nel tratto da D a C -

Momento Flettente caso $0 \leq s \leq l$ (tra A e B)

7

Guardando il lato \ominus :

~~ficcome~~ la coppia di forze P in A e $T(s)$ in ipot. \rightarrow un Momento Flettente positivo che dà una rotazione antioraria al caso in G e pertanto l'equazione di equilibrio alla rotazione sarà :

$$\text{Solo } G \rightarrow + M(s) + Pl - P(s) = 0$$

dove abbiamo trascurato $T(s)$ in quanto ha braccio nullo -

$$\boxed{M(s) = Ps - Pl} \quad \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = -Pl \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi, da A a B un Momento Flettente negativo che ci smentisce l'ipotesi di rotazione antioraria e pertanto va preso orario \rightarrow -

~~Inoltre essendo negativo, tende le fibre superiori della mensola.~~

Dal grafico si capisce che le fibre tese nel tratto da A a B sono quelle superiori e pertanto ~~il momento~~ ~~il grafico~~ l'andamento ~~del~~ grafico del Momento Flettente va preso negativo, ossia dalla parte superiore della linea fondamentale ed ~~è~~ ~~linearmente~~ varia linearmente da A a B, con valore massimo in A (pari a $-Pl$) e valore nullo in B (pari a 0) -



8

Momento Flettente caso $l \leq s \leq 2l$ (tra B e C)Guardiamo il lato \ominus :

Ipotesiamo un Momento Flettente positivo che dà una rotazione antioraria al cuneo in G e pertanto l'equazione di equilibrio alle rotazioni sarà :

$$+ M(s) + Pl - P \cdot s + \frac{P}{2} \cdot (s-l) = 0$$

$$+ M(s) = + Ps - Pl - \frac{P \cdot s}{2} + \frac{Pl}{2} \quad - \frac{P}{2}(s-l)$$

$$+ M(s) = \left(Ps - \frac{Ps}{2} \right) + \left(\frac{Pl}{2} - Pl \right)$$

$$M(s) = \frac{Ps}{2} - \frac{Pl}{2} = \frac{1}{2} P(s-l)$$

$$\boxed{M(s) = \frac{1}{2} P \cdot (s-l)} \quad \begin{cases} s=l \rightarrow M(s) = 0 \\ s=2l \rightarrow M(s) = + \frac{Pl}{2} \end{cases}$$

che ci conferma la rotazione antioraria del cuneo in G ;

inoltre siccome il momento flettente $M(s)$ ~~rende~~ tende le fibre inferiori della mensola (vedere grafico), sarà positivo ed il suo andamento grafico sarà dalla parte di sotto della linea fondamentale, con valore nullo in B (a conferma di quello del tratto AB) e valore massimo in C (ossia $\frac{Pl}{2}$)



Momento Flettente

caso $0 \leq s \leq l$ (tra D e C)

9

Guardiamo il lato \oplus :

In questo caso, non è necessario ipotizzare un Momento Flettente, ma siccome rispetto al polo G l'unica forza che dà momento è $P/2$ in D, allora ~~per~~ per l'equilibrio alle rotazioni dobbiamo considerare un momento Flettente $M(s)$ orario che contrasta quello antiorario di $P/2$;
pertanto l'equazione sarà :

$$+ \frac{P}{2} \cdot (s) - M(s) = 0$$

$$M(s) = + \frac{Ps}{2}$$

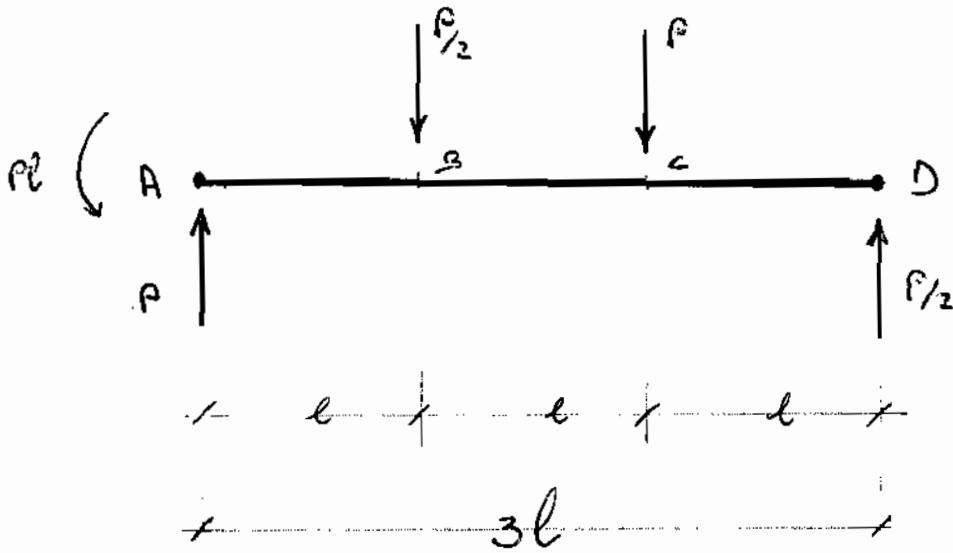
$$\begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \\ s=l \rightarrow M(s) = + \frac{Pl}{2} \end{cases}$$

~~Quindi~~ Quindi facendo variare s da 0 ed l (ossia da D e C) il momento flettente è positivo ed assume un andamento grafico lineare, con un valore massimo in C pari a $+\frac{Pl}{2}$ (a conferma del valore trovato in C nel caso BC) ed un valore nullo in D pari a 0; dalla parte inferiore della linea fondamentale (le fibre tese sono quelle inferiori) -

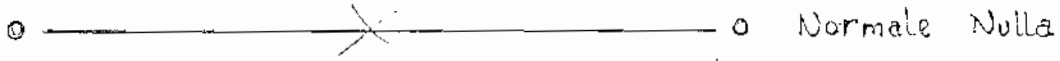
ATTENZIONE

~~Per~~ ~~i~~ ~~valori~~ ~~ottenuti~~ ~~per~~ ~~s~~
i valori del momento flettente $M(s)$, ottenuti sostituendo $s=0$ ed $s=l$ ci inducono a ~~non~~ pensare che il momento flettente sia antiorario (valori positivi), ma siccome non abbiamo fatto un'ipotesi su $M(s)$ non dobbiamo smentire o confermare niente; ciò è dovuto al fatto che $M(s)$ deve essere obbligatoriamente orario.

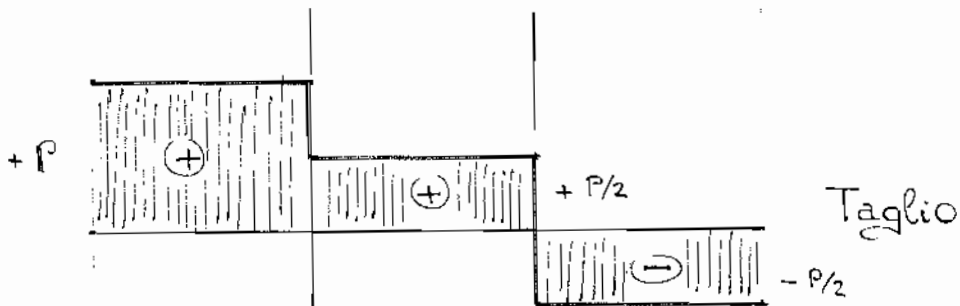
DIAGRAMMI : ~~Forze~~ Normale (N), Taglio (T), Momento Flettente (M) :



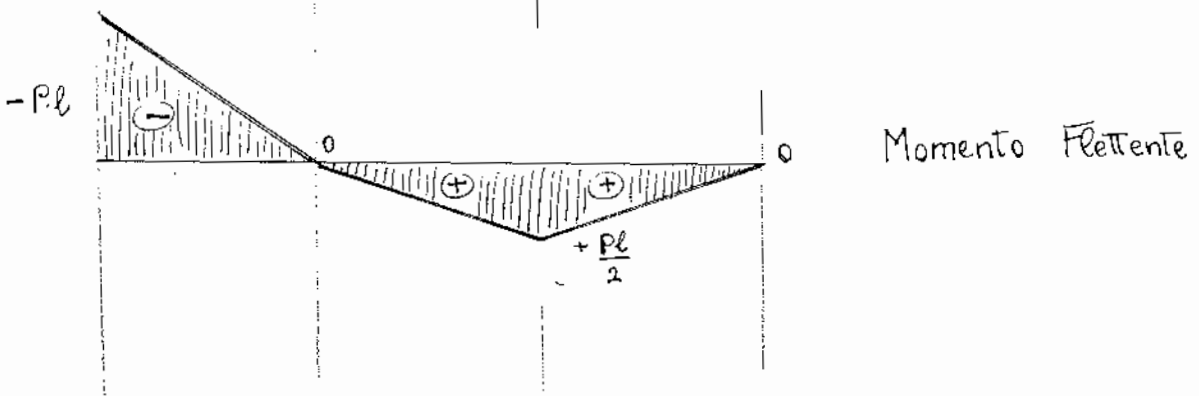
(N)



(T)



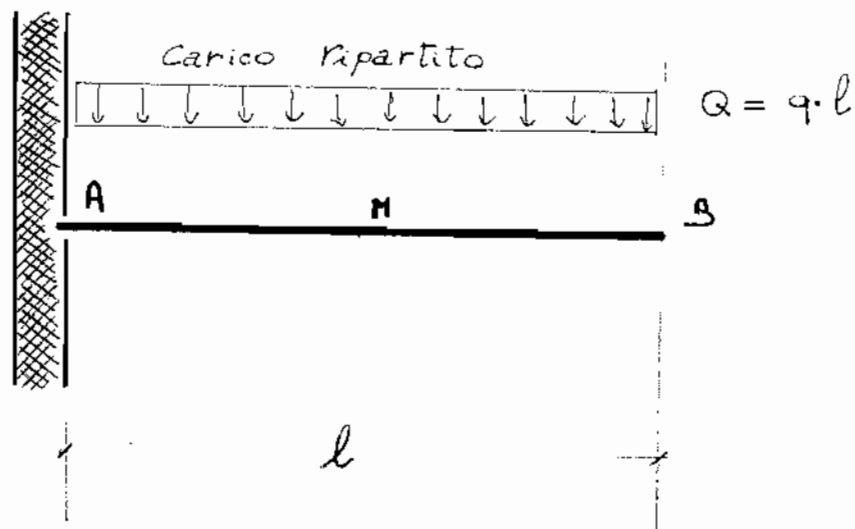
(M)



ESERCIZIO Mensola con carico distribuito

1

della 7^a LEZIONE



ANALISI ESTERNA :

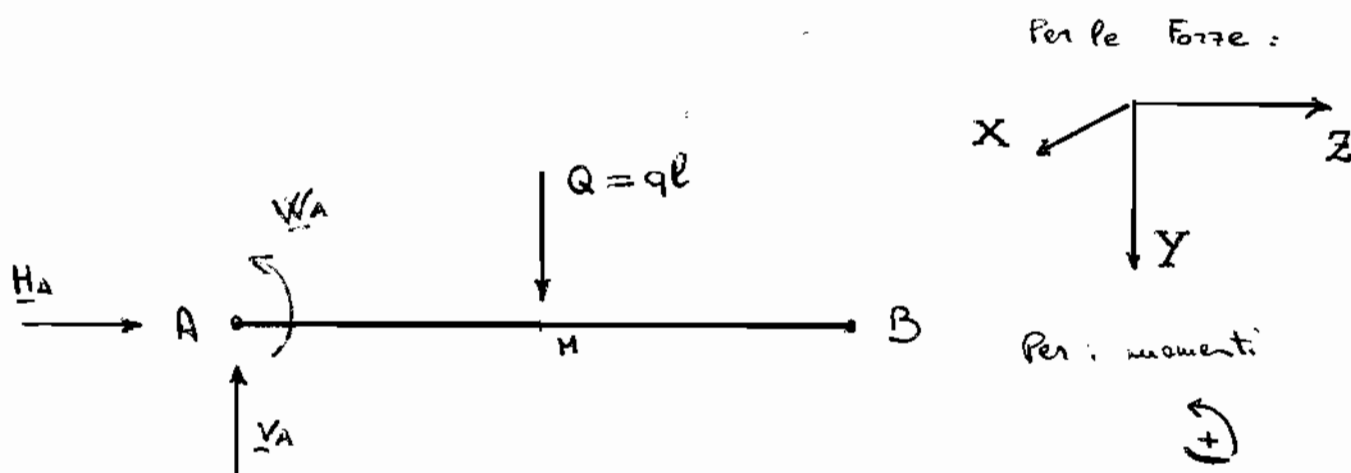
Trattasi di un vincolo ad INCASTRO, ossia un vincolo che impedisce tutti e tre i moti possibili (rotazione, trasl. orizzontale e verticale) del punto A;

~~per tanto, il numero dei gradi di libertà (ossia 3) viene limitato da~~

per tanto, il numero di vincoli limita il numero di gradi di libertà (ossia 3) possibili e quindi il SISTEMA E ISOSTATICO ;

(2)

Per disegnare lo Schema Statico, abbiamo bisogno di considerare il Carico Concentrato in Mezzaria e sostituire al vincolo incastrato le rispettive 3 reazioni Vincolari ossia:



Si ipotizziamo i versi di \underline{V}_A e \underline{H}_A ed il senso di rotazione di \underline{W}_A in un primo momento, che successivamente saranno confermati o smentiti dall'equazioni di equilibrio;

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASL. VERTICALE:

$$\underline{Q} - \underline{V}_A = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{Q} = \underline{V}_A = q \cdot l}$$

Se avessi ipotizzato \underline{V}_A verso il basso, allora:

$$\underline{Q} + \underline{V}_A = 0 \Rightarrow \underline{V}_A = -\underline{Q}$$

e ci dice che, essendo \underline{Q} il carico esterno assegnato, la reazione vincolare \underline{V}_A deve essere di ugual modulo, ma di verso opposto a \underline{Q} e quindi smentisce l'ipotesi, correggendo verso l'alto.

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASL. ORIZZONTALE :

3

$$\underline{H_A} = 0$$

non essendoci altre forze orizzontali applicate alla mensola -

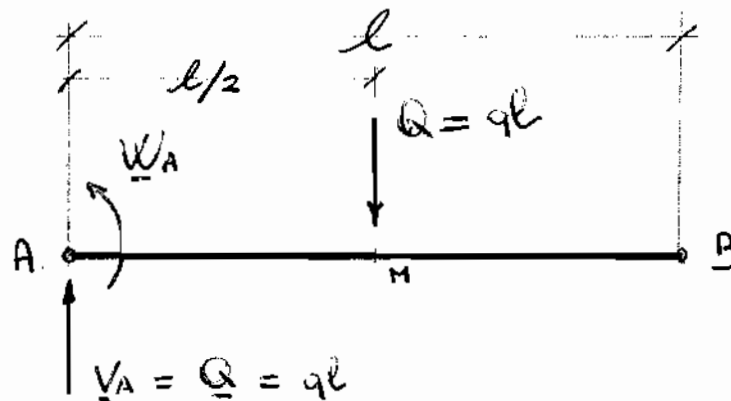


EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI ALLA ROTAZIONE :

polo in A ~~tra~~, in quanto è qui il vincolo che impedisce la rotazione -

~~Ora che conosciamo il verso~~

vediamo la nuova ~~è~~ situazione statica :



per i Momenti

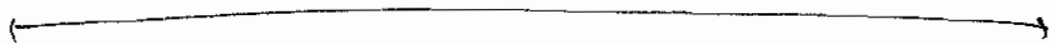


rotazione antioraria
segno positivo

notiamo che $\underline{V_A}$ non dà momento in quanto passa per il polo (braccio nullo) e pertanto l'equazione è la seguente :

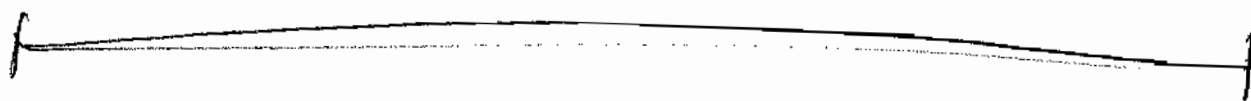
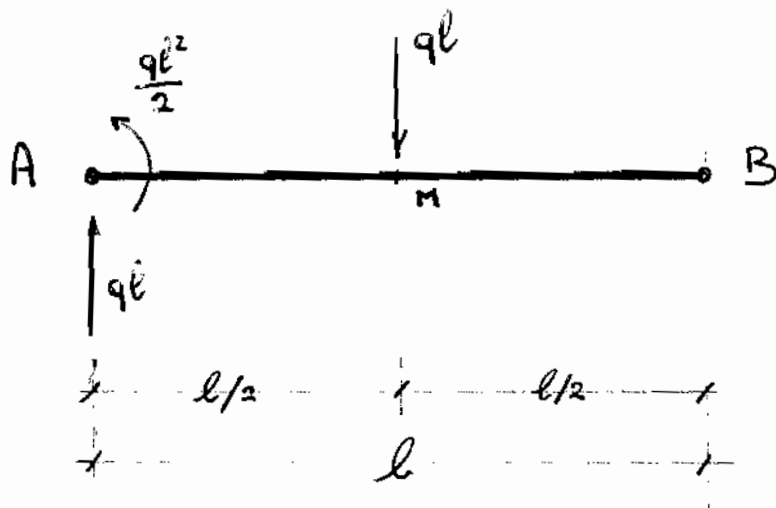
$$\underline{W_A} - \underline{Q} \left(\frac{l}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{W_A} - (ql) \cdot \left(\frac{l}{2} \right) = 0$$

ossia $\underline{W_A} - \frac{ql^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{W_A} = \frac{ql^2}{2}$



4

Per tanto lo schema statico, assume la seguente forma finale :



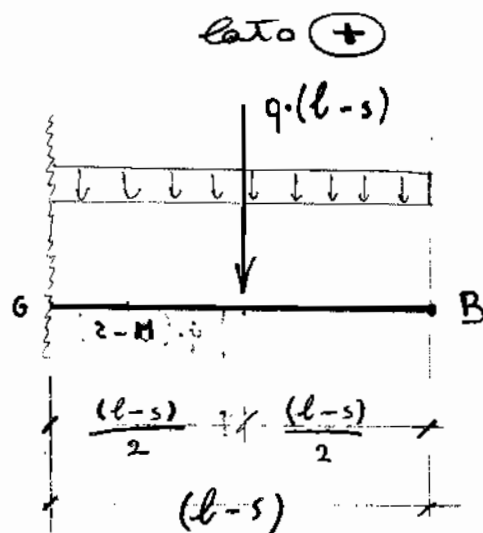
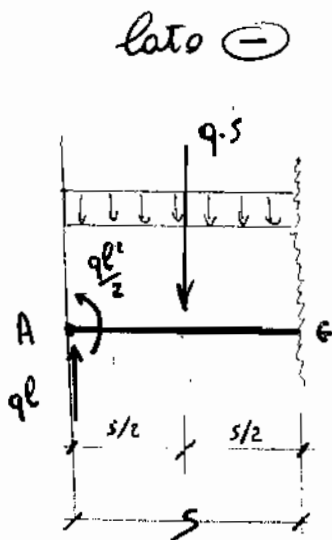
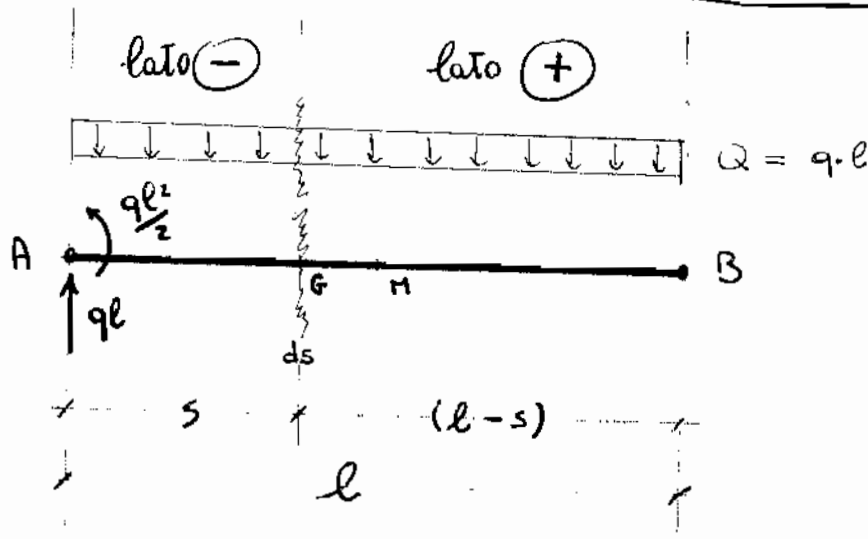
ANALISI INTERNA

(5)

Per poter disegnare il DIAGRAMMA della Normale (N), del Taglio (T) e del Momento Flettente (M), abbiamo bisogno di fare un'Analisi Interna della Trave, andando a sezionare questa in due punti arbitrari, prima e dopo la sezione di mezz'aria M .

Tenendo conto del CARICO RIPARTITO, iniziamo con una sezione alla sinistra della Mezz'aria M :

CASO $0 \leq s \leq l/2$

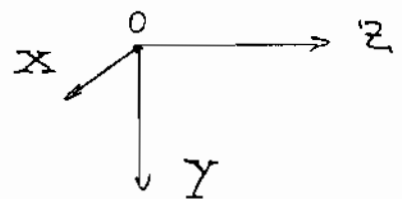
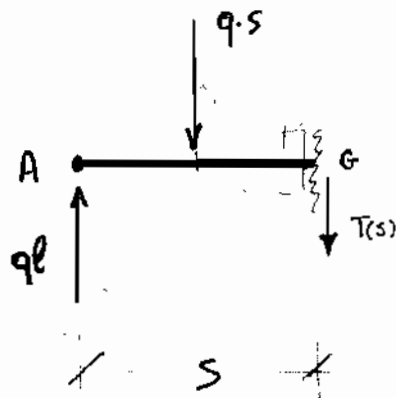


6

TAGLIO: CASO $0 \leq s \leq l/2$

Ora osserviamo il lato \ominus considerando il carico concentrato nel punto medio ~~invece~~ invece che quello ripartito ~~trascurando~~ il momento $\underline{M}_A = \frac{ql^2}{2}$ che ai fini dell'equilibrio alla traslazione non interviene, ossia:

lato \ominus



CONVENZIONE DEL TAGLIO = (rotazione oraria del cuneo, Taglio positivo)

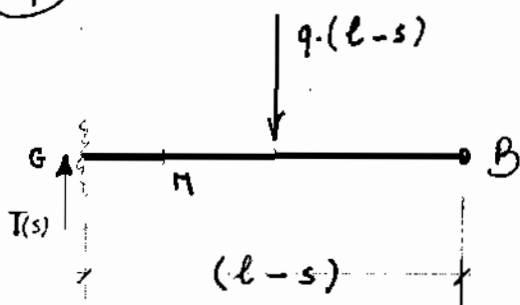
Ora prendendo il Taglio $\underline{T}(s)$ verso il basso nella sezione di taglio G, abbiamo la seguente equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

$$q \cdot s - ql + T(s) = 0$$

$$T(s) = +ql - qs \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(s) = q \cdot (l - s)}$$

Verificando nel lato \oplus , dobbiamo considerare il Taglio $\underline{T}(s)$ verso l'alto per principio di azione e reazione, ossia

lato \oplus

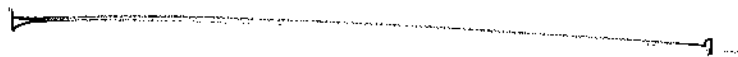


abbiamo pertanto la seguente equazione di equilibrio alla Trasl. verticale del lato \oplus :

$$q \cdot (l-s) - T(s) = 0$$

$$\boxed{T(s) = + q \cdot (l-s)}$$

QUINDI, È CONFERMATO IL MODULO DEL TAGLIO ;



Pertanto alla sinistra della Traversa M della mensola, si verifica che :

$$T(s) = + q \cdot (l-s) \begin{cases} s=0 \rightarrow T(s) = + q \cdot l \\ s=l/2 \rightarrow T(s) = + \frac{q \cdot l}{2} \end{cases}$$

abbiamo un andamento lineare positivo dal valore massimo ql in A, al valore ~~intermedio~~ $\frac{ql}{2}$ in traversa M ;

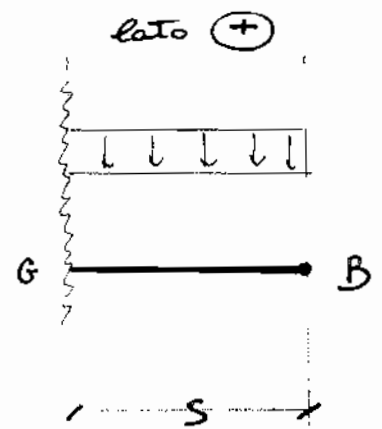
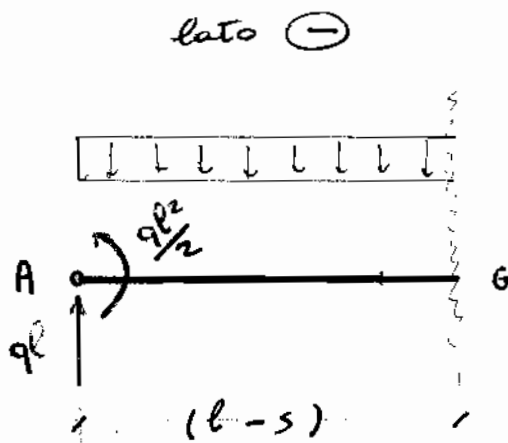
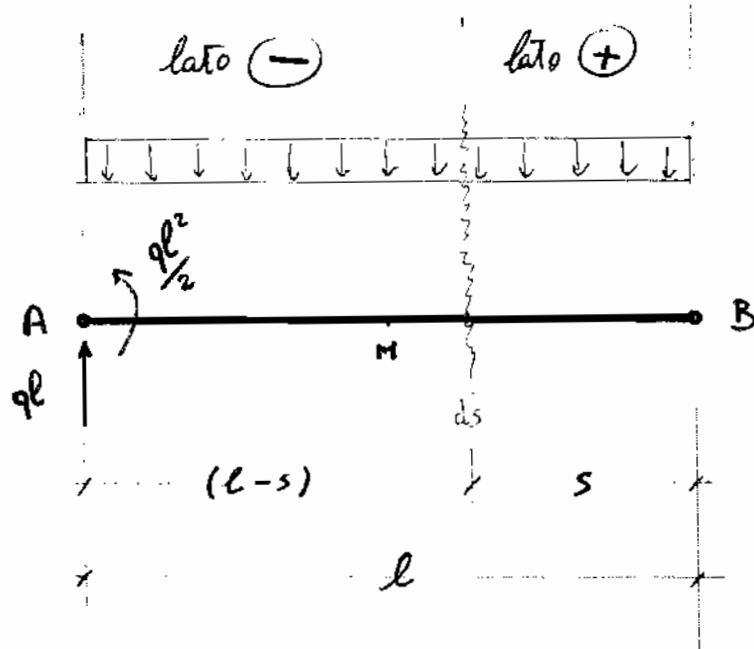
Pertanto questo taglio positivo alla sinistra della Traversa conferma la convenzione di notazione oraria ;

il grafico associato al taglio positivo, va disegnato al di sopra della linea fondamentale ;

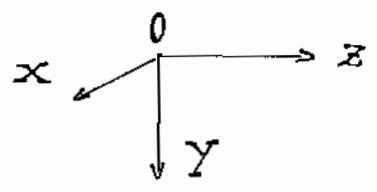
8

TAGLIO caso $\frac{l}{2} \leq s \leq l$

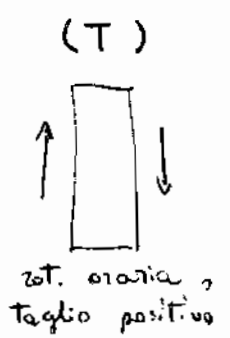
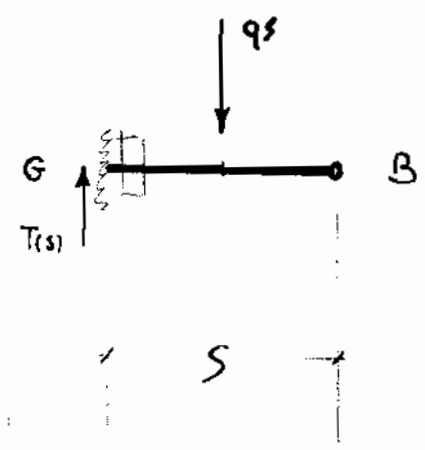
Tenendo conto del Carico Ripartito, sezioniamo la ~~me~~ mensola alle destra della Mezzera M :



Ora osserviamo il lato (+) considerando il carico concentrato nel punto medio di questo tratto S, ossia =



lato (+)



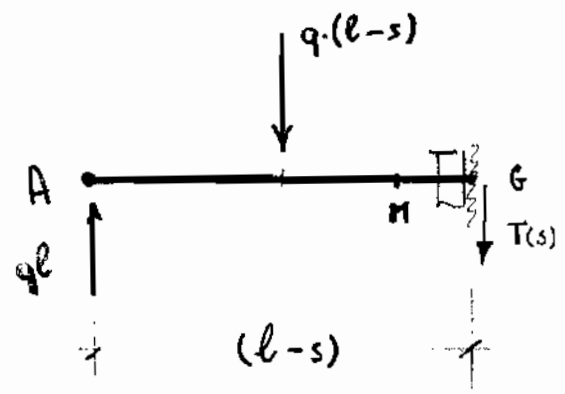
Ora ipotizziamo un Taglio T(s) verso l'alto, che per la convenzione del Taglio da una rotazione oraria e quindi e' positivo;

Per il sistema di riferimento scelto, l'equazione di equilibrio alle traslazioni verticali e':

$$q \cdot s - T(s) = 0 \Rightarrow T(s) = q \cdot s$$

Verificando nel lato (-), dobbiamo considerare il Taglio T(s) verso il basso nella sezione G per il PRINCIPIO di AZIONE E REAZIONE =

lato (-)



abbiamo la seguente equazione di equilibrio alla Traslazione Verticale

$$T(s) + q \cdot (l - s) - ql = 0$$

$$T(s) = ql - q(l - s) = \cancel{ql} - \cancel{ql} + qs = qs$$

ossia $T(s) = +qs$

QUINDI È CONFERMATO IL MODULO DEL TAGLIO ;



pertanto alla destra della Mezzia M dell'intera mensola, si verifica che :

$$T(s) = +qs \begin{cases} s = l/2 \rightarrow T(s) = +\frac{q \cdot l}{2} \\ s = 0 \rightarrow T(s) = 0 \end{cases}$$

abbiamo un andamento lineare positivo dal valore intermedio $+\frac{ql}{2}$ in mezzia M, al valore nullo in B ;

pertanto questo taglio positivo alla destra della Mezzia, conferma la rotazione oraria dovuta alle convenzioni del Testo

il grafico associato a tale taglio positivo, va disegnato al di sopra della linea fondamentale come continuo al tratto in cui $(0 \leq s \leq l/2)$, ossia ~~al~~ al tratto a sinistra di M.

MOMENTO FLETTENTE

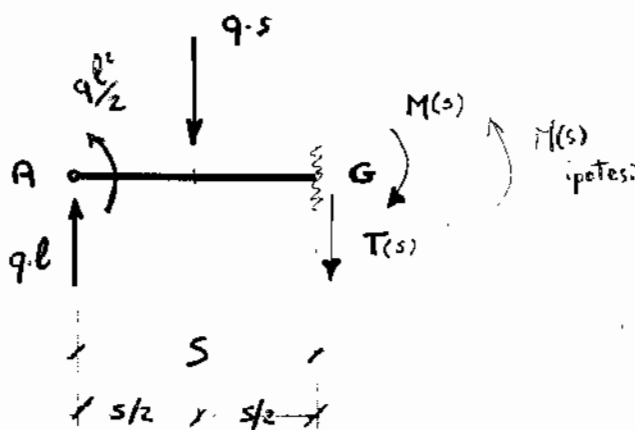
11

caso $0 < s < l/2$

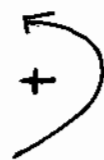
Ora riprendiamo il lato \ominus , considerando tutte le forze (attive e reattive), compreso il Taglio $T(s)$ ed il momento reattivo W_A ~~reattivo~~;

inoltre Teniamo presente del carico ripartito, concentrato nel punto medio di questo tratto s , ossia:

lato \ominus



CONVENZIONE
MOMENTO



per rotazione antioraria
momento positivo.

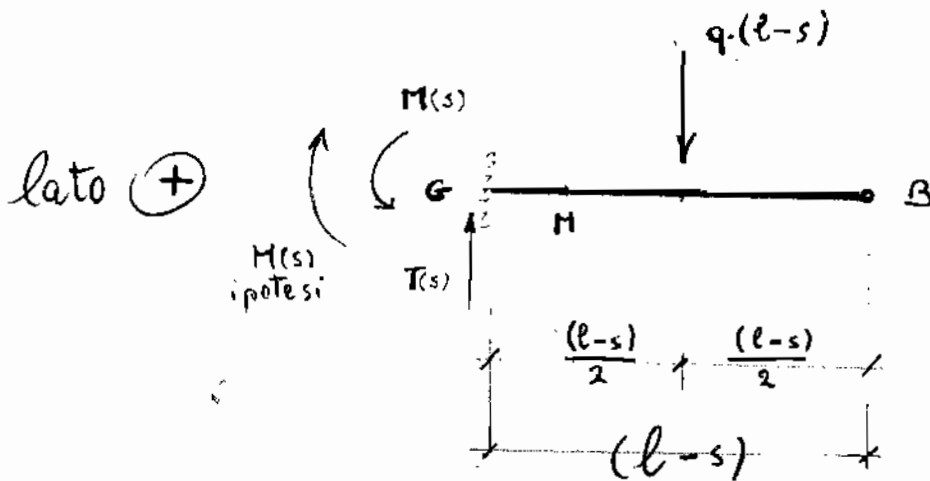
Facciamo l'ipotesi di rotazione antioraria del Momento Flettente $M(s)$ come convenzione vuole e pertanto abbiamo la seguente equazione di Equilibrio dei Momenti alle Rotazioni:

$$\text{polo G} \rightarrow +M(s) + q \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + \frac{q l^2}{2} - q l s = 0$$

$$\boxed{+M(s) = q l s - \frac{q s^2}{2} - \frac{q l^2}{2}}$$

(12)

Facciamo ora la verifica nel lato \oplus considerando che $M(s)$ deve essere preso orario per ~~il~~ principio di Azione e Reazione, pertanto:



L'equazione di equilibrio ~~dei~~ dei momenti alla rotazione ~~dei~~ sarà:

$$- M(s) - q(l-s) \cdot \frac{(l-s)}{2} = 0$$

$$+ M(s) = - \frac{q(l-s)^2}{2} = - \frac{q(l^2 - 2ls + s^2)}{2} = - \frac{ql^2}{2} + \frac{2qls}{2} - \frac{qs^2}{2}$$

$$\text{ossia } \boxed{M(s) = + qls - \frac{qs^2}{2} - \frac{ql^2}{2}}$$

QUINDI, È CONFERMATO IL MODULO DEL MOMENTO FLETTENTE ;

Pertanto alla sinistra della lettera M della mensola, si verifica che:

$$M(s) = qls - \frac{qs^2}{2} - \frac{ql^2}{2} \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = - \frac{ql^2}{2} \\ s=l/2 \rightarrow M(s) = - \frac{ql^2}{8} \end{cases}$$

dall'estremo A sino alla lettera M, abbiamo un Momento Flettente negativo che per la convenzione \oplus vuol dire rotazione oraria che smentisce l'ipotesi di rotazione antioraria nel lato \ominus ; l'andamento del Momento Flettente sarà parabolico (dovuto al quadrato) -

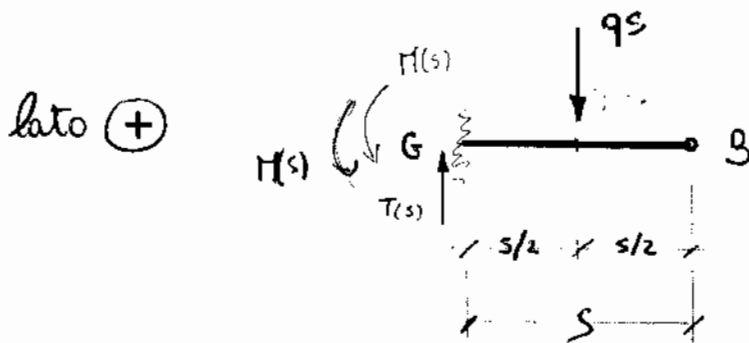
Per un momento flettente negativo, le fibre tese sono quelle superiori della mensola e pertanto il diagramma si trova al disopra della LINEA FONDAMENTALE.

MOMENTO FLETTENTE

caso $\frac{l}{2} \leq s \leq 0$

13

Dopo aver sezionato la mensola alla destra della lettera M , riconsideriamo il lato \oplus e calcoliamo l'equilibrio dei Momenti alla Rotazione:



Osserviamo che in questo caso non si tratta di fare una ipotesi sul momento flettente, ma ~~di~~ di considerare la coppia di forze $T(s)$ ~~nella~~ nella sezione di taglio G e q_s nel punto medio di questo tratto della mensola; tale coppia dà una rotazione ~~di~~ oraria e pertanto un momento della coppia negativo; cosicché all'equilibrio dobbiamo avere un momento flettente $M(s)$ in G di tipo antiorario e quindi positivo al fine di contrastare il momento della coppia -

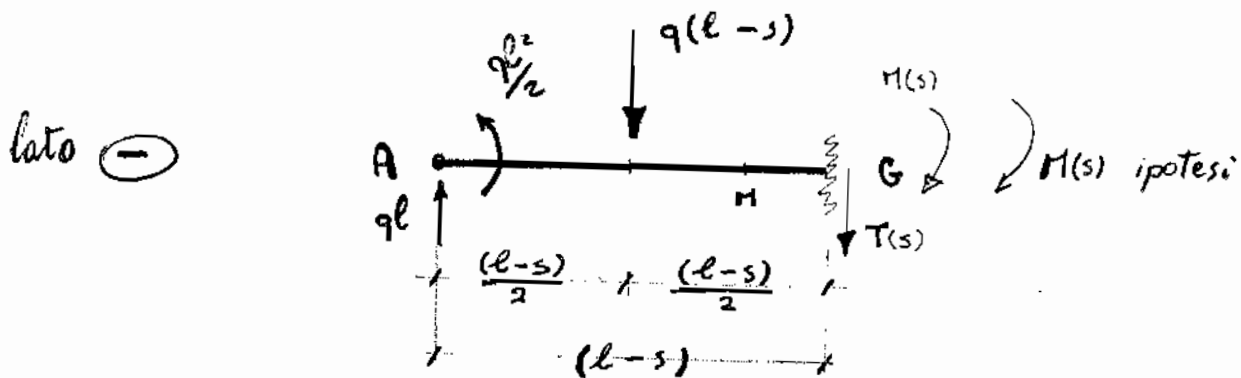
Abbiamo così la seguente equazione di equilibrio alle rotazioni:

$$+ M(s) - q_s \left(\frac{s}{2} \right) = 0$$

$$\left[+ M(s) = + \frac{q_s s^2}{2} \right]$$

14

Facciamo ora la verifica nel lato \ominus considerando che $M(s)$ dev'essere preso orario per il principio di AZIONE E REAZIONE :



L'equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione sarà :

$$-M(s) + q(l-s) \cdot \frac{(l-s)}{2} + \frac{ql^2}{2} - ql \cdot (l-s) = 0$$

$$M(s) = \frac{q \cdot (l-s)^2}{2} + \frac{ql^2}{2} - ql^2 + qls$$

$$M(s) = \frac{q \cdot (l^2 - 2ls + s^2)}{2} + \frac{ql^2}{2} - ql^2 + qls$$

$$M(s) = \frac{ql^2}{2} - qls + \frac{qs^2}{2} + \frac{ql^2}{2} - ql^2 + qls =$$

$$= \left(\frac{ql^2}{2} + \frac{ql^2}{2} \right) - ql^2 + \frac{qs^2}{2} = (ql^2) - ql^2 + \frac{qs^2}{2}$$

ossia $M(s) = + \frac{qs^2}{2}$

QUINDI, È CONFERMATO il MODULO DEL MOMENTO FLETTENTE $M(s)$;

In entrambi i lati della mensola sezionata alla destra della peggiora, otteniamo la stessa equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione.

Pertanto alla destra della Mezzoria M, ossia caso $\frac{l}{2} \leq s \leq 0$, si verifica che:

$$M(s) = + \frac{qs^2}{2} \begin{cases} s = l/2 \rightarrow M(s) = + \frac{ql^2}{8} \\ s = 0 \rightarrow M(s) = 0 \end{cases}$$

dall'estremo B alla Mezzoria M, il momento flettente $M(s)$ è positivo e per la convenzione di una notazione antioraria che conferma ~~positivo~~ $M(s)$ in G nel lato \oplus ;

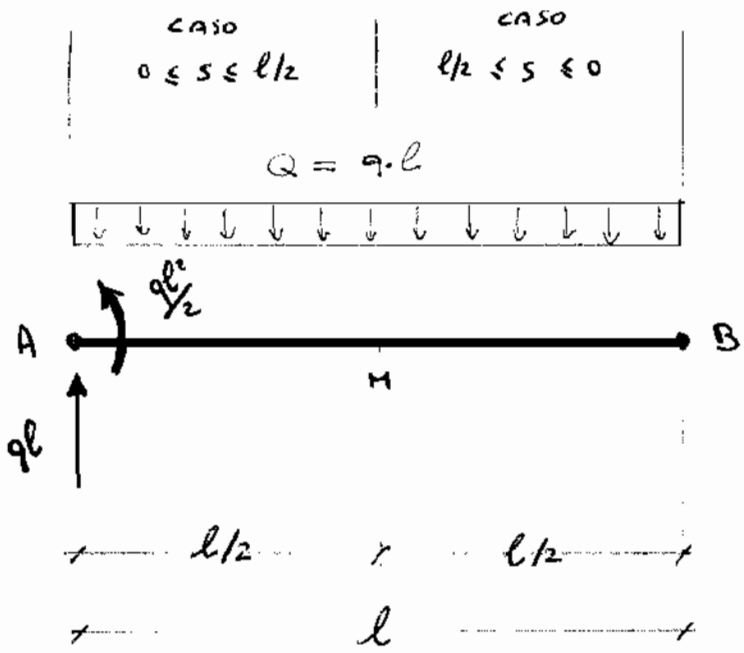
ma essendo, nella realtà, tese le fibre superiori della mensola il mio andamento grafico (parabola) dall'estremo B alla mezzoria M, assume ~~un~~ un segno negativo;

per tanto il diagramma sarà al di sopra delle linee fondamentali e rappresenta perfettamente la continua del tratto da A ad M;

quindi:

$$-M(s) = ~~\frac{qs^2}{2}~~ \begin{cases} s = l/2 \rightarrow M(s) = - \frac{ql^2}{8} \\ s = 0 \rightarrow M(s) = 0 \end{cases}$$

DIAGRAMMI = Normale (N), Taglio (T), Momento Flettente (M)

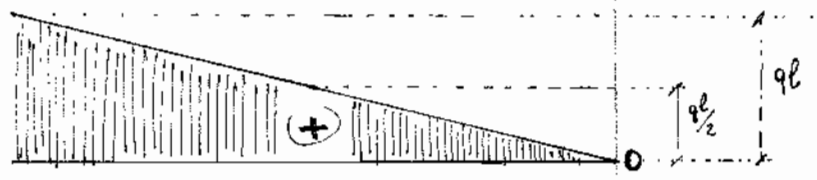


(N)

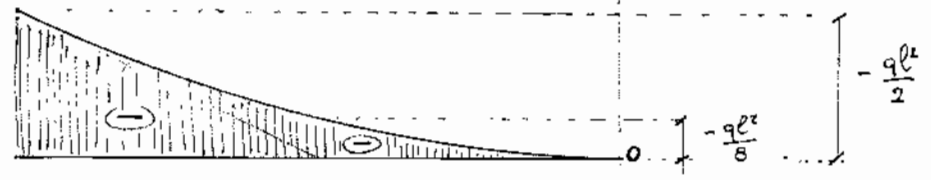


Normale Nulla, in quanto non ci sono forze esterne orizzontali applicate alla mensola;

(T)



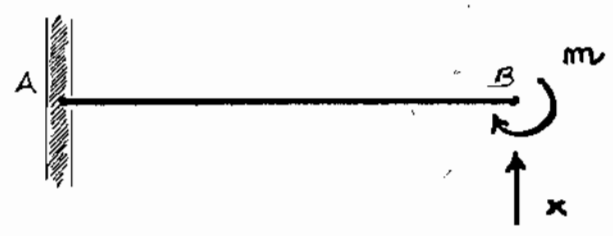
(M)





SISTEMA IPERSTATICO (1 volta)

Associa a questa struttura, un SISTEMA ISOSTATICO togliendo il CARRELLO - CERNIERA e sostituendo ad esso la reazione vincolare verticale, vista come una forza esterna attiva:



SISTEMA ISOSTATICO ASSOCIATO

dove x è l'incognita iperstatica;

Principio di Sovrapposizione degli Effetti =

EFFETTO (1)

EFFETTO (2)



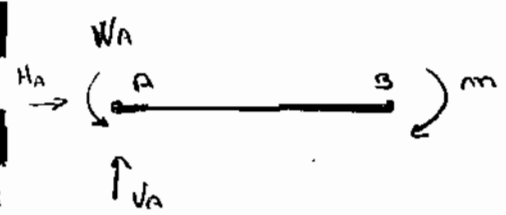
Equazione di equilibrio alle rotazioni:

Polo A $\rightarrow +W_A - m = 0$

$W_A = +m$

Equazione di equilibrio alle trasl. verticale:

LUNGO $Y \rightarrow -V_A = 0 \rightarrow V_A = 0$



$$\boxed{\kappa = \frac{M}{E \cdot J}}$$

CURVATURA

$$\kappa = -V_{,zz}$$

$$\boxed{V_{,zz} = \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z}{l}}$$

→ derivata seconda

Integrando indefinitamente questa funzione, si ottiene:

$$V_{,z} = \int V_{,zz} = \int \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z}{l} = \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{1}{l} \int z = \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{1}{2} z^2 \right) + A$$

quindi $\left[V_{,z} = \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z^2}{2l} + A \right]$ derivata prima con $A = \text{costante}$

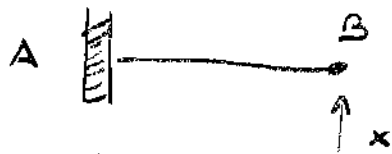
Integrando indefinitamente questa derivata prima, si ottiene:

$$\begin{aligned} V = \int V_{,z} &= \int \left[\left(\frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z^2}{2l} \right) + A \right] = \int \left(\frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z^2}{2l} \right) + \int 1 \cdot A = \\ &= \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{1}{2l} \int z^2 + 1 \cdot \int A = \left[\frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{1}{2l} \cdot \left(\frac{1}{3} z^3 \right) + A \cdot z \right] + B \end{aligned}$$

quindi $\boxed{V = \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{z^3}{6l} + A \cdot z + B}$

$$M(s) = W_n = x \cdot l$$

$$\Gamma(s) = W_n - V_n \cdot l = x \cdot l - x \cdot l = 0$$



ANALISI ESTERNA

Equazione di equilibrio alla rotazione:

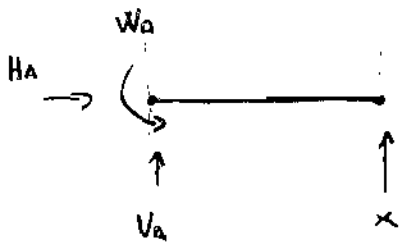
Polo A $\rightarrow +W_A + x \cdot l = 0$

$W_A = -x \cdot l$ *sarà orario.*

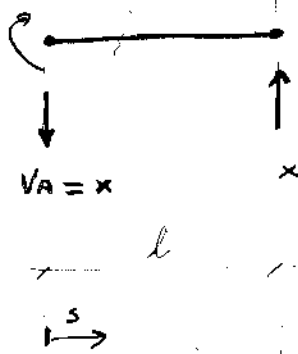
Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

LUNGO Y $\rightarrow -V_A - x = 0$

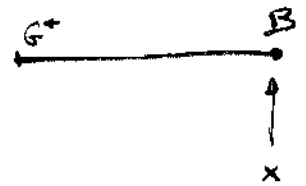
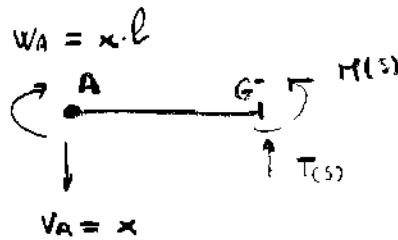
$V_A = -x$ *andrà in basso;*



$W_A = x \cdot l$



ANALISI INTERNA



TAGLIO

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

LUNGO Y $\rightarrow -T(s) - V_A = 0$

$T(s) = -V_A$

$T(s)$ andrà verso l'alto e sarà un TAGLIO NEGATIVO (rotazione antioraria del cavo in sezione).

In modulo sarà:

$T(s) = V_A = x \rightarrow T(s) = x$



Ipotezzando un Momento Flettente $M(s)$ positivo per la convenzione delle fibre, all'equilibrio dei momenti si avrà:

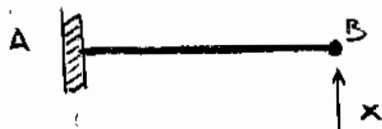
$$\text{Polo } G \rightarrow + M(s) - W_A + V_A \cdot s = 0$$

$$M(s) = W_A - V_A \cdot s$$

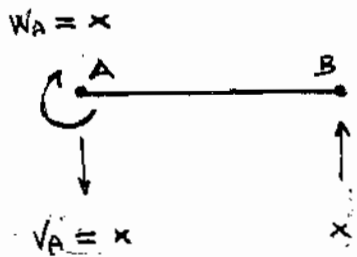
Facendo variare s tra 0 (in A) ed l (in B), si ha:

$$M(s) = W_A - V_A \cdot s \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = x \cdot l \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \end{cases}$$

Il risultato positivo ci dice che $M(s)$ avrà un senso di rotazione antiorario (ipotesi corretta) che quindi genera un MOMENTO FLETTENTE POSITIVO (sono tese le fibre di sotto).



Trave Assegnata



Schema Statico

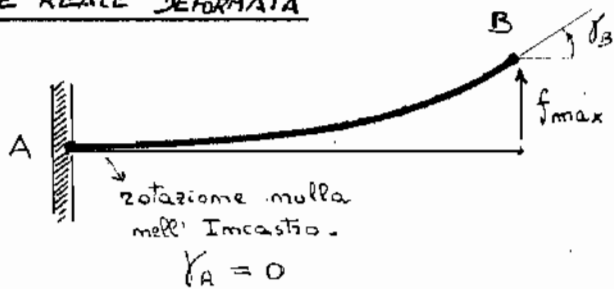


Diagramma Momento

TRAVE REALE ASSEGNATA



TRAVE REALE DEFORMATA



Area Triangolo rettangolo : $A = \frac{1}{2} b \times h$ che coincide con il carico concentrato ausiliario

$$Q^* = A = \frac{1}{2} b \times h = \frac{1}{2} l \cdot (q_{max}^*) = \frac{1}{2} l \cdot (x \cdot l)$$

ossia $Q^* = \frac{1}{2} x l^2$

Equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale :
LUNGO Z $\rightarrow H_B^* = 0$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale :
LUNGO Y $\rightarrow +Q^* - V_B^* = 0$

$$V_B^* = Q^* = \frac{1}{2} x l^2$$

Equazione di equilibrio alla rotazione :
FOTO B* $\rightarrow +W_B^* + Q^* \cdot \frac{2}{3} l = 0$

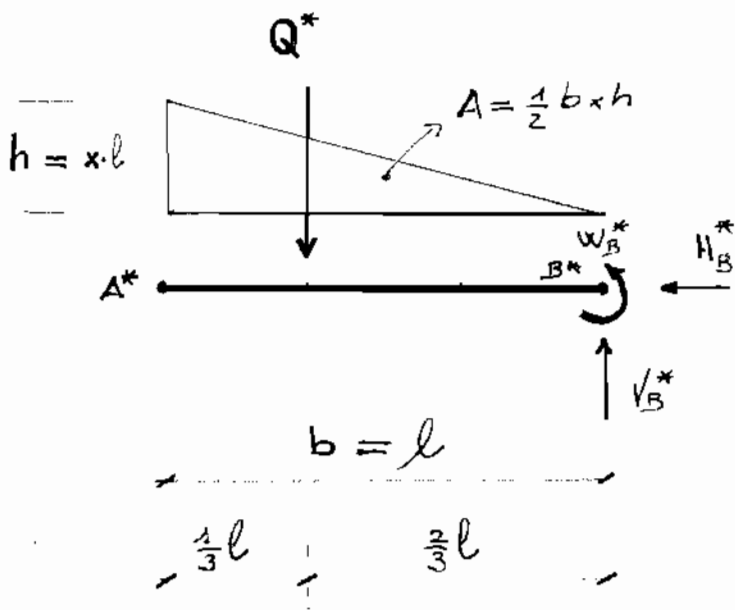
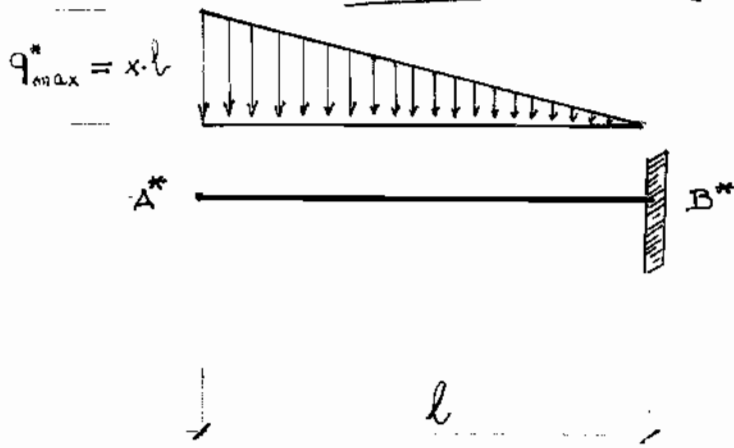
$$W_B^* = -Q^* \cdot \frac{2}{3} l$$

Il segno negativo ci dice che W_B^* sarà orario, mentre in modulo sarà :

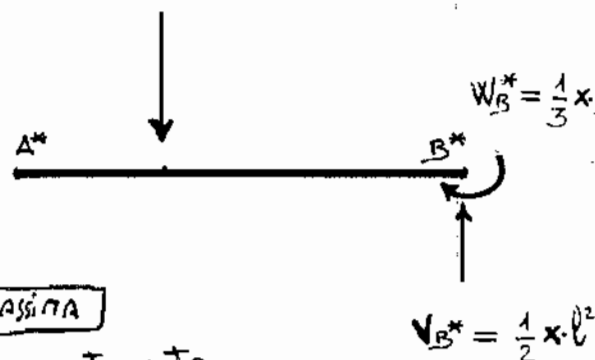
$$W_B^* = Q^* \cdot \frac{2}{3} l = \left(\frac{1}{2} x l^2\right) \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} x l^3$$

ossia $W_B^* = \frac{1}{3} x \cdot l^3$

TRAVE AUSILIARIA



$$Q^* = \frac{1}{2} x \cdot l^2$$

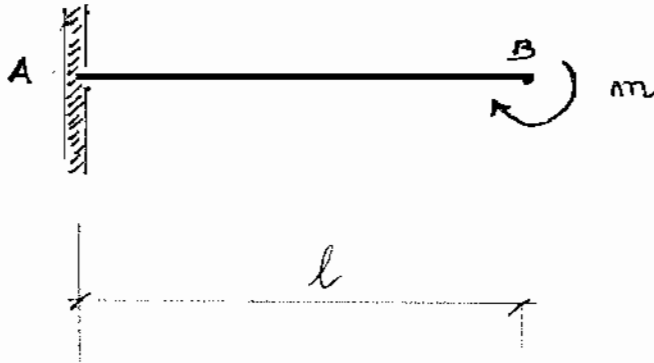


FRELLIA MASSIMA

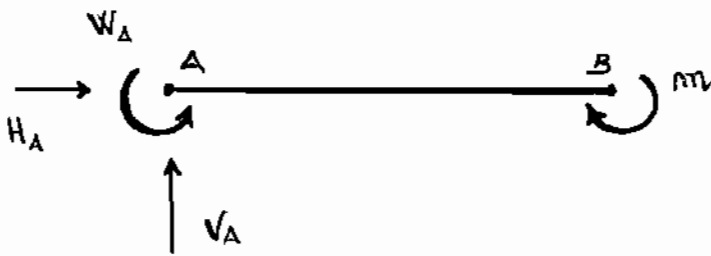
Il massimo spostamento verticale della trave reale assegnata, lo si avrà nel punto B soggetto alla forza x che spingerà da sotto innalzando la trave di un quantità data da :

$$f_{max} = \frac{M_{max}^*}{EJ} = \frac{W_B^*}{EJ} \rightarrow f_{max} = \frac{1}{3} \frac{x l^3}{EJ}$$

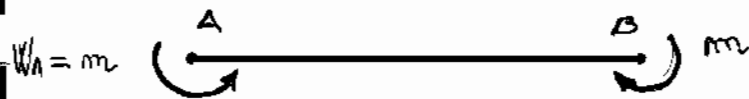
ANALISI DELL'EFFETTO (1)



Sostituendo all'incastro le reazioni vincolari, si ha il seguente schema statico



da cui, lo schema statico finale è:



ANALISI ESTERNA

Equazione di equilibrio alla rotazione:

$$\text{Polo A} \rightarrow +W_A - m = 0$$

$$\boxed{W_A = +m}$$

Il segno positivo del risultato, ci dice che W_A dev'essere antiorario (conferma la scelta arbitraria).

Equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale:

$$\text{LUNGO Z} \rightarrow \boxed{H_A = 0}$$

non ci sono azioni esterne tali da generare la reazione in H_A in A.

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

$$\text{LUNGO Y} \rightarrow -V_A = 0 \quad \boxed{V_A = 0}$$

non ci sono azioni esterne tali da generare la reazione V_A in A.

ANALISI INTERNA

Sulla base dello schema statico finale qui accanto, l'ANALISI

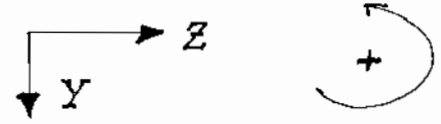
INTERNA ci dice che in ogni sezione della trave, la NORMALE ed il TAGLIO son nulli, mentre il MOMENTO FLETTENTE $M(s)$ sarà negativo (tende le fibre di sopra della trave), di modulo:

$$\boxed{M(s) = m} \quad \begin{array}{l} \text{MOMENTO FLETTENTE} \\ \text{NEGATIVO} \end{array}$$

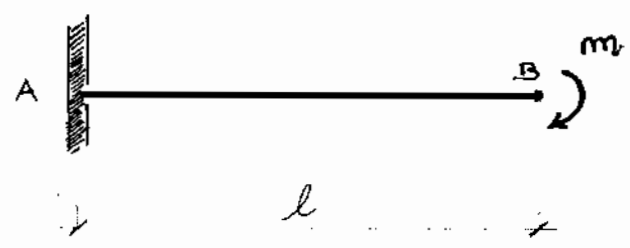
in quanto dovrà contrastare le due coppie m agli estremi.

In particolare, facendo variare il generico punto di sezione tra 0 (in A) ed l (in B) si ha che l'aumento del MOMENTO FLETTENTE sarà costantemente negativo di modulo m .

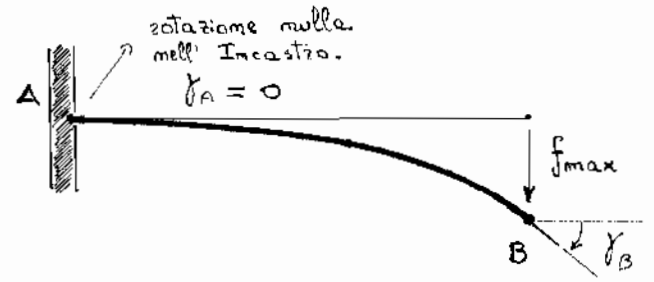
TEOREMA DI MOHR



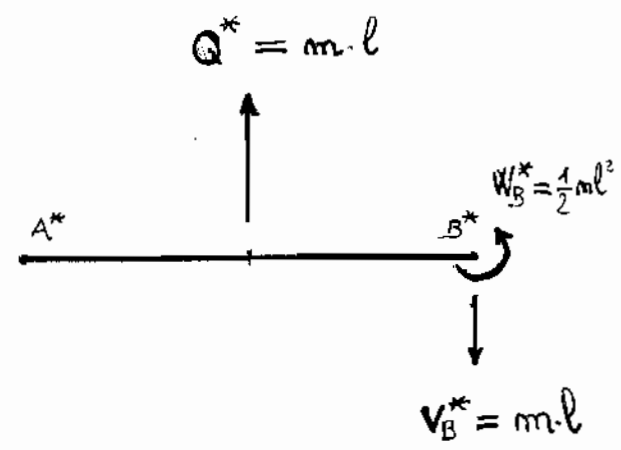
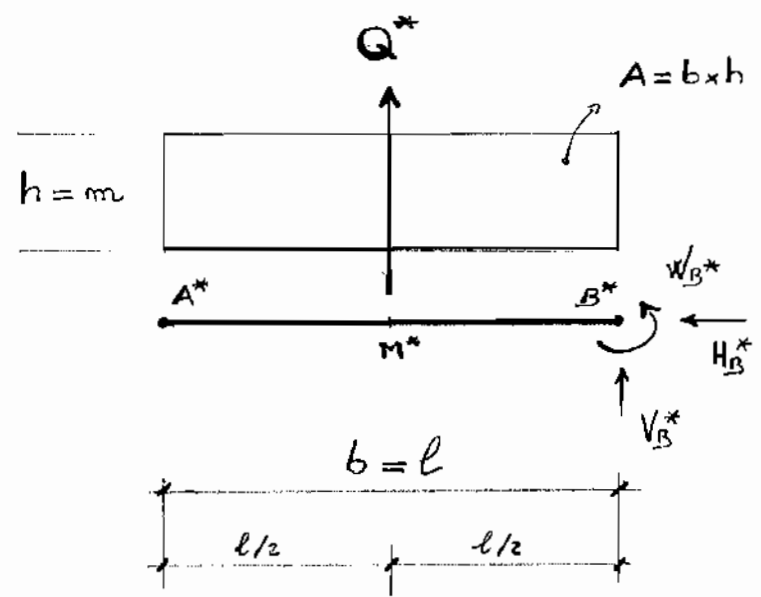
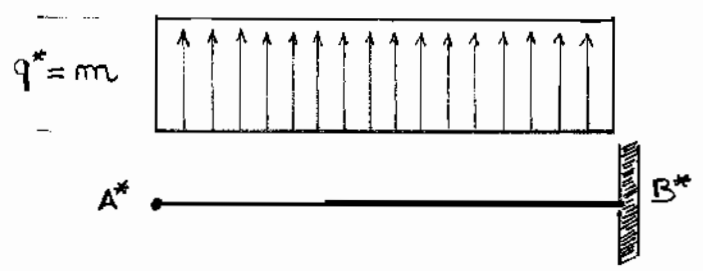
TRAVE REALE ASSEGNATA



TRAVE REALE DEFORMATA



TRAVE AUSILIARIA ASSOCIATA



ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

Determinare il CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO Q^* significa determinare la risultante del CARICO RIPARTITO q^* avente forma di un rettangolo di base $b=l$ ed altezza $h=q^*$;
 in altre parole, Q^* coincide con l'area A di questo rettangolo, ossia:

$$Q^* = A = b \times h = l \cdot q^* = l \cdot m$$

ossia $Q^* = m \cdot l$

Equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale:
 LUNGO Z $\rightarrow H_B^* = 0$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:
 LUNGO Y $\rightarrow -Q^* - V_B^* = 0$
 $V_B^* = -Q^* = -ml \rightarrow V_B^* = ml$ (avanti in basso).

Equazione di equilibrio alla rotazione:
 POLO $B^* \rightarrow +W_B^* - Q^* \cdot \frac{l}{2} = 0$
 $W_B^* = +Q^* \cdot \frac{l}{2} = +(m \cdot l) \cdot \frac{l}{2} \rightarrow W_B^* = \frac{1}{2} ml^2$

Il segno positivo, conferma il senso di rotazione antiorario scelto arbitrariamente.

FRECCIA MASSIMA

Il massimo spostamento verticale della trave reale assegnata, lo si avza nel punto B soggetto alla coppia m che essendo oraria, abbassa la trave di una quantità data da:

$$f_{max} = \frac{M_{max}^*}{E \cdot J} = \frac{W_B^*}{EJ} = \left(\frac{1}{2} ml^2\right) \cdot \frac{1}{EJ}$$

ossia $f_{max} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{E \cdot J}$

EQUAZIONE DI CONGRUENZA

7

La soluzione del SISTEMA IPERSTATICO assegnato in partenza, consiste nella determinazione dell'incognita iperstatica x , della deformata relativa a tale sistema con suo diagramma del Momento Flettente dovuto alla sovrapposizione degli effetti (1) e (2).

INCOGNITA IPERSTATICA

Osservando il SISTEMA IPERSTATICO assegnato in partenza, si capisce che la trave essendo incastrata in A ed incernierata in B, non può subire spostamenti verticali, ma solo deformarsi a causa della coppia m applicata in B;

in particolare, la scomposizione degli EFFETTI (1) e (2) fornisce in B due spostamenti verticali opposti tra loro, il primo verso il basso dovuto alla sola coppia m ed il secondo verso l'alto dovuto alla sola forza x .

Pertanto, affinché in B non si abbia spostamento verticale è necessario che si verifichi la seguente condizione:

$$f_{\max}(m) + f_{\max}(x) = 0 \quad \text{dove } f_{\max}(x) \text{ va verso l'alto, quindi sarà negativa;}$$

Sostituendo i valori delle due frecce massime in B, si ottiene la seguente equazione nella sola incognita iperstatica x , ossia:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{EJ} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x l^3}{EJ} = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x l^3}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{EJ} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{l}}$$

il quale sostituito in $f_{\max}(x)$, fornisce il risultato:

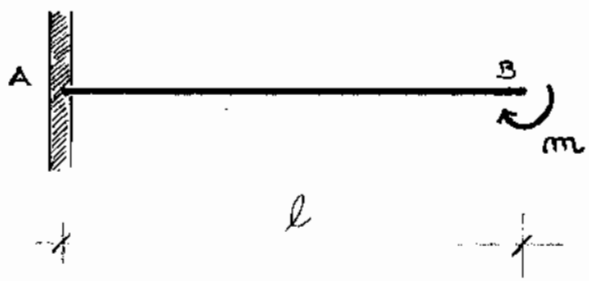
$$f_{\max}(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x l^3}{EJ} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot l^3 \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{m}{l}\right) \cdot l^3 \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{EJ}$$

$$\text{ossia } \boxed{f_{\max}(x) = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{EJ} = f_{\max}(m)} \quad \text{SPOSTAMENTI in B UGUALI ED OPPOSTI TRA LORO.}$$

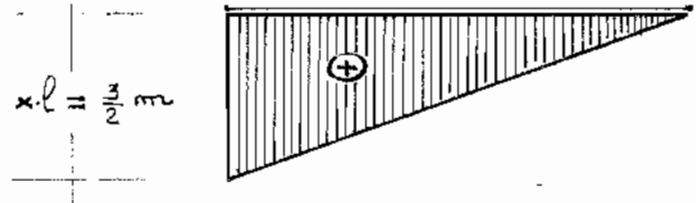
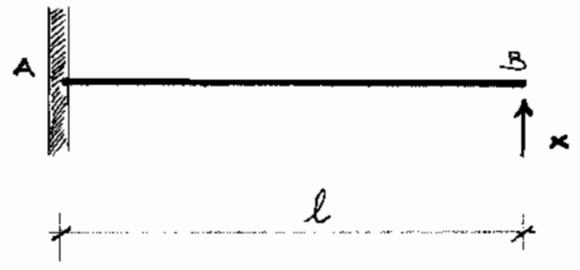
Pertanto è verificato che nel SISTEMA IPERSTATICO assegnato, non abbiamo nessuno spostamento verticale nel punto B.

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI (1) e (2)

EFFETTO (1)

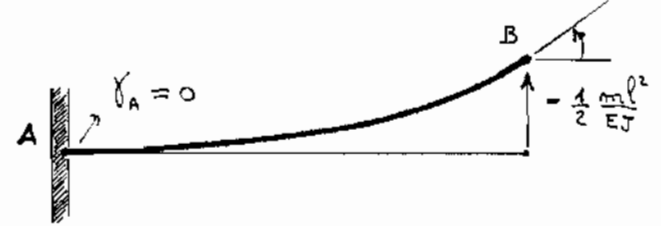
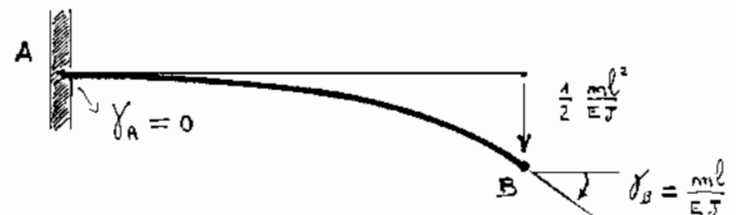


EFFETTO (2)

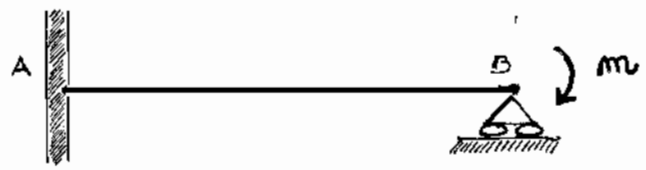


$x \cdot l = \frac{3}{2} m$

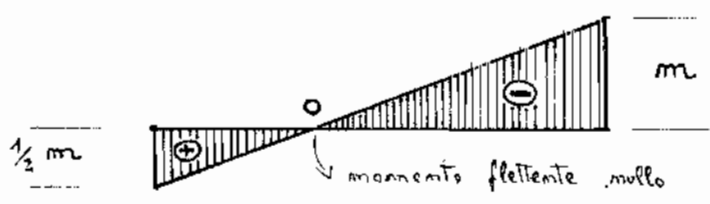
$\gamma_B = -\frac{3}{4} \frac{m l}{EJ}$



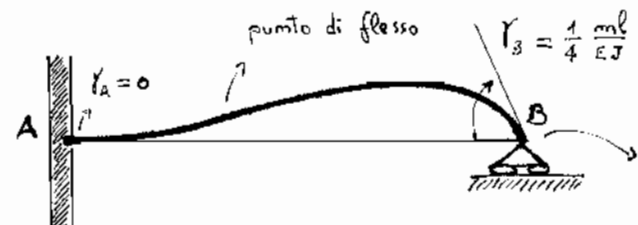
Sovrapponendo questi due effetti, si ottiene il SISTEMA IPERSTATICO DEFORMATO:



SISTEMA IPERSTATICO ASSEGNATO
una volta iperstatico.



MOMENTO FLETTENTE TOTALE
si ottiene sovrapponendo i due grafici del momento flettente precedenti



→ rotazione oraria, positiva.

SISTEMA IPERSTATICO DEFORMATO
spostamento nullo di B incerniato al carrello.

Trovata l'incognita iperstatica x , è possibile riprendere i risultati della trave EFFETTO (2) che sono in funzione di tale incognita:

$$x = \frac{3}{2} \frac{m}{l} \quad \text{INCOGNITA IPERSTATICA}$$

Sostituiamo questo valore in:

$$Q^*(x) = \frac{1}{2} x \cdot l^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{m}{l}\right) \cdot l^2 = \frac{3}{4} ml$$

$$\text{ossia } Q^*(x) = \frac{3}{4} ml \quad \text{CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO}$$

Poi abbiamo:

$$V_B^*(x) = Q^*(x) = \frac{1}{2} x \cdot l^2 = \frac{3}{4} ml$$

$$\text{ossia } V_B^*(x) = \frac{3}{4} ml \quad \text{REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA}$$

Ed allora abbiamo:

$$W_B^*(x) = \frac{1}{3} x \cdot l^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{m}{l}\right) \cdot l^3 = \frac{1}{2} ml^2$$

$$\text{ossia } W_B^*(x) = \frac{1}{2} ml^2 \quad \text{COPPIA REATTIVA AUSILIARIA}$$

Tenendo conto della DEFORMAZIONE ELASTICA $\left(\frac{1}{EJ}\right)$, si ricava:

$$f_B(x) = \frac{V_B^*(x)}{EJ} = \left(\frac{3}{4} m \cdot l\right) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{ml}{EJ}$$

siccome $V_B^*(x)$ va verso l'alto, genera un taglio negativo, quindi rotazione antioraria:

$$f_B(x) = - \frac{3}{4} \frac{ml}{EJ} \quad \text{ROTAZIONE ANTIORARIA NEGATIVA}$$

Poi abbiamo:

$$f_{max}(x) = \frac{W_B^*(x)}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{2} ml^2\right) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{EJ}$$

siccome x spinge la trave verso l'alto, si ha spostamento verticale negativo:

$$f_{max}(x) = - \frac{1}{2} \frac{ml^2}{EJ} \quad \text{FRECCIA MASSIMA}$$

10

Per quanto riguarda i risultati della trave EFFETTO (1), sono tutti in funzione del termine moto m assegnato in partenza -

Quello che ci resta da determinare per questa trave è l'ANGOLO di DEFORMAZIONE $\theta_B(m)$ dovuto alla rotazione in B della Trave a causa della coppia m applicata; pertanto, conoscendo la REAZIONE VINCOLARE AUSILIARIA $V_B^*(m)$, si ha:

$$\theta_B(m) = \frac{V_B^*(m)}{EJ} = (m \cdot l) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{ml}{EJ}$$

siccome $V_B^*(m)$ va verso il basso, genera un TAGLIO POSITIVO, quindi una rotazione oraria positiva:

$$\theta_B(m) = + \frac{ml}{EJ} \quad \text{ROTAZIONE ORARIA POSITIVA}$$

Per quanto riguarda il SISTEMA IPOTETICO DEFORMATO, abbiamo in A rotazione nulla dovuta all'incastro, quindi:

$$\theta_A = 0 \quad \text{ROTAZIONE NULLA}$$

mentre in B, dovendo essere la trave incernierata al canello, si ha spostamento verticale nullo con conseguente deformazione che presenta un ANGOLO di DEFORMAZIONE θ_B ; quest'ultimo si ricava sovrapponendo le due REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE $V_B^*(m)$ e $V_B^*(x)$ dovute, rispettivamente, agli effetti (1) e (2), tenendo com del sistema di riferimento scelto, ossia:

$$\left. \begin{array}{l} V_B^*(m) \rightarrow \text{va verso il basso (positivo)} \\ V_B^*(x) \rightarrow \text{verso l'alto (negativo)} \end{array} \right\} V_B^*(m, x) = V_B^*(m) + V_B^*(x) = +ml - \frac{3}{4}ml$$

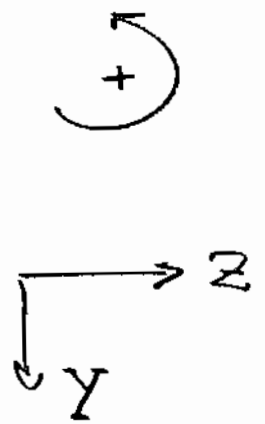
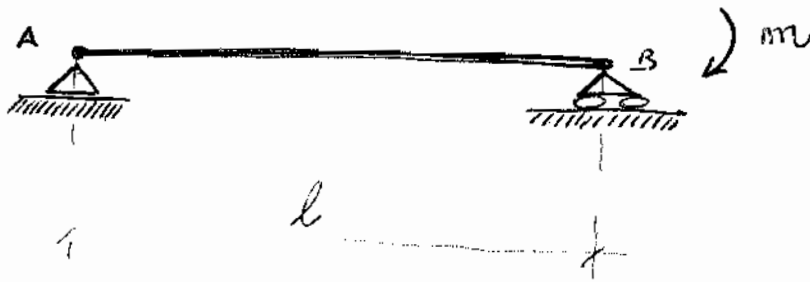
$$V_B^*(m, x) = + \frac{1}{4} ml \quad \text{REAZIONE VINCOLARE TOTALE (verso il basso, genera TAGLIO POSITIVO quindi rotazione oraria positiva)}$$

$$\text{da cui: } \theta_B(m, x) = \frac{V_B^*(m, x)}{EJ} = \left(+ \frac{1}{4} ml \right) \cdot \frac{1}{EJ} \rightarrow \theta_B(m, x) = + \frac{1}{4} \frac{ml}{EJ} \quad \text{ROTAZIONE ORARIA POSITIVA}$$

ESERCIZIO di Isostatica

Deformazione

1



Equilibrio alle trasl. orizzontale :

LUNGO Z \rightarrow $H_A = 0$

Equilibrio alle trasl. verticale :

LUNGO Y \rightarrow $-V_A - V_B = 0$
 ~~$V_A = -V_B$~~

Equilibrio alle rotazione :

POLO B \rightarrow $-V_A \cdot l - m = 0$

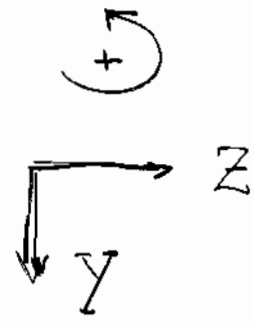
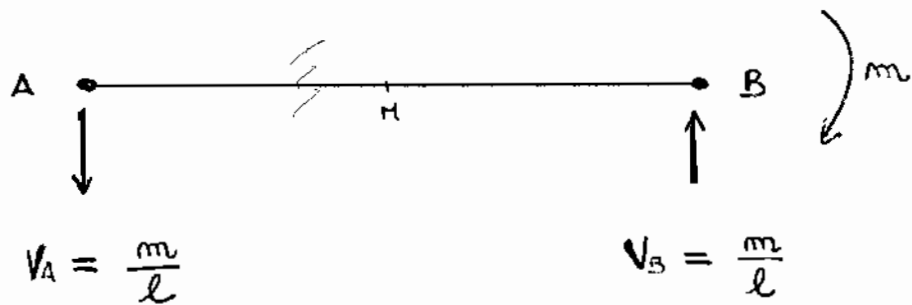
curvai verso il basso

$V_A \cdot l = -m$

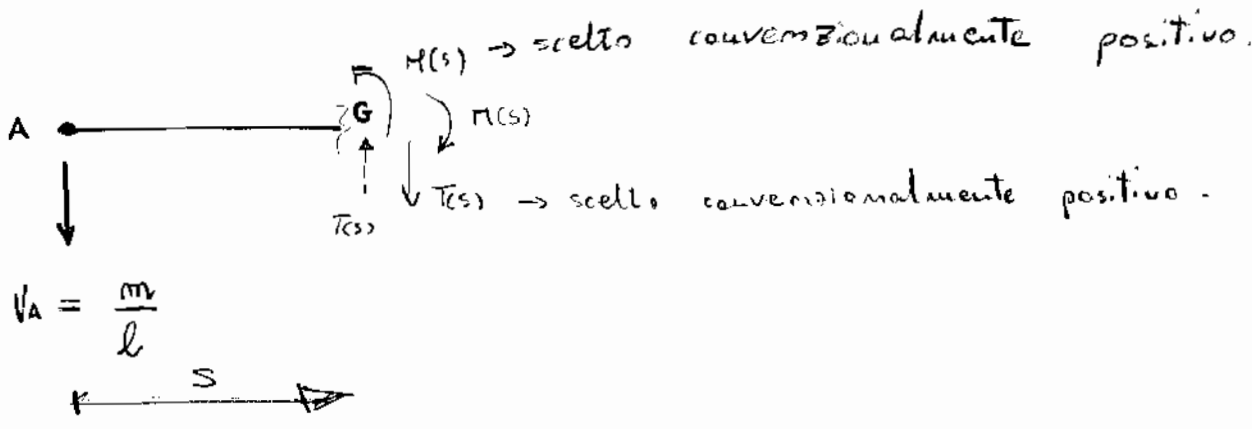
\rightarrow $V_A = -\frac{mv}{l}$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio alle trasl. verticale :

LUNGO Y \rightarrow $-V_A - V_B = 0 \rightarrow -\left(-\frac{mv}{l}\right) - V_B = 0 ;$ $V_B = +\frac{mv}{l}$



Sezionando in un generico punto della trave a partire da A sino alle metrerie M , si ha:



TAGLIO

Equazione di equilibrio alle Traslazioni verticali:

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow + V_A + T(s) = 0$$

$$T(s) = - V_A$$

Il segno negativo smentisce la scelta di $T(s)$ verso il basso che pertanto dovrà puntare in alto, generando così un TAGLIO NEGATIVO (rotazione antioraria del cavo di trave nella generica sezione).

In modulo, il taglio sarà:

$$|T(s)| = |V_A| = \frac{m}{l}$$

costante lungo tutta la trave -

3

MOMENTO FLETTENTE

Equazione di equilibrio alle rotazioni :

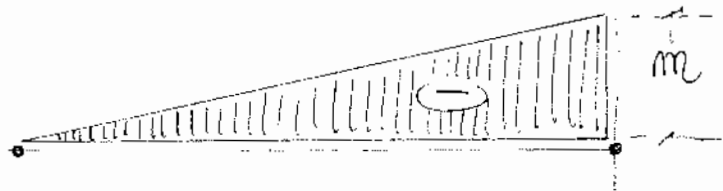
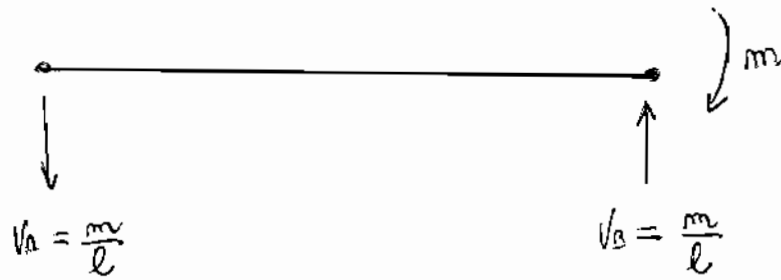
POLO G $\rightarrow + M(s) + V_A \cdot s = 0$

$M(s) = -V_A \cdot s$

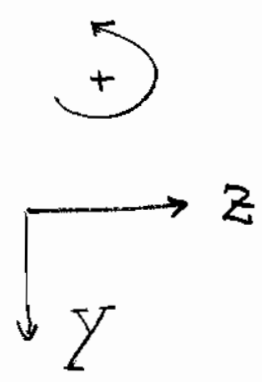
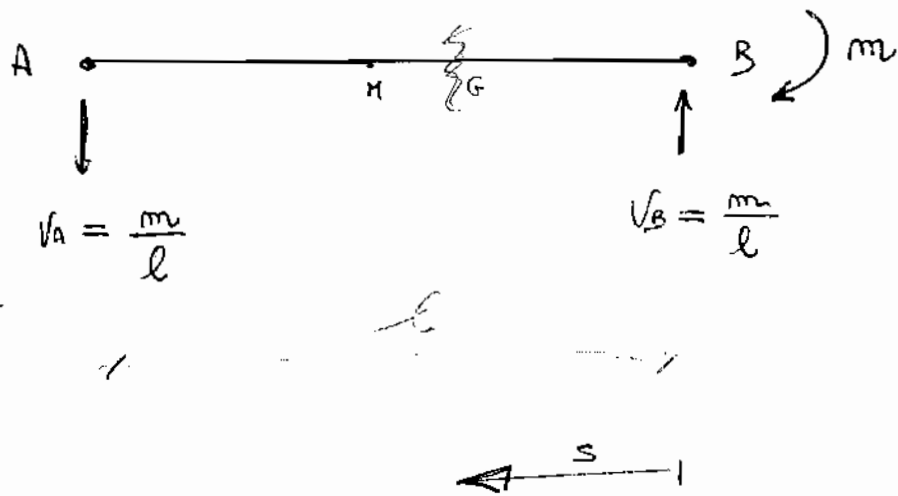
Il segno negativo smentisce l'aver scelto $M(s)$ convenzionalmente positivo orario; pertanto assumere un senso di rotazione orario che genererà un MOMENTO FLETTENTE NEGATIVO (tenderà le fibre superiori della trave).

Facendo variare s tra 0 (in A) ed l (in B), si ha :

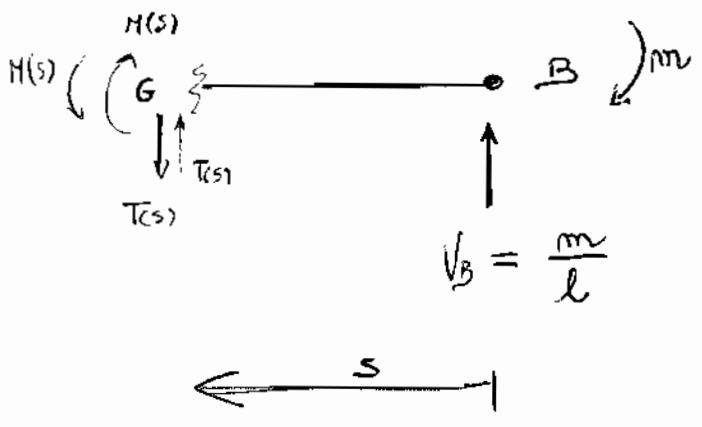
$$M(s) = -V_A \cdot s \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \\ s=l \rightarrow M(s) = -V_A \cdot l = -\left(\frac{m}{l}\right) \cdot l = -m \end{cases}$$



④



Se si taglia in un generico punto della Trave a partire da B prima della mezzoria M , si ha:



TAGLIO

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

LUNGO $Y \rightarrow -v_B - T(s) = 0$

$$\boxed{T(s) = -v_B} = -\frac{mv}{l}$$

anche verso il basso e genererà TAGLIO NEGATIVO (rotazione antioraria del cavo di trave in sezione G)

5) MOMENTO FLETTENTE /:

Equazione di equilibrio alla rotazione:

Polo G $\rightarrow -M(s) - m + V_B \cdot s = 0$

$$M(s) = V_B \cdot s - m$$

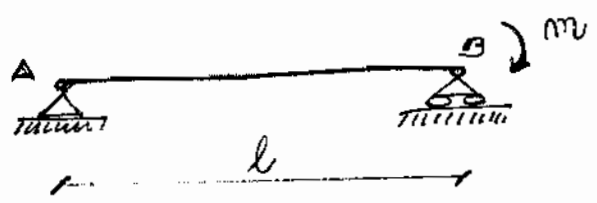
Facendo variare s tra 0 (in B) ed l (in A), si ha:

$$\pi(s) = V_B \cdot s - m \begin{cases} s=0 \rightarrow \pi(s) = -m \\ s=l \rightarrow \pi(s) = V_B \cdot l - m = \frac{m}{l} \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

TEOREMA 2° FOUR

TRAVE REALE

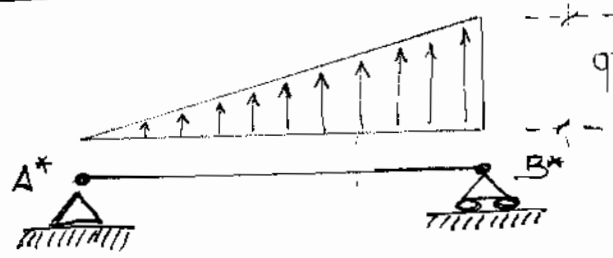
$$\text{Area} = \frac{1}{2} b \times h = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_{\max}^* = \frac{1}{2} \cdot l \cdot m$$



$$Q^* = A = \frac{1}{2} ml$$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:
LUNGO Y $\rightarrow -Q^* - V_A^* - V_B^* = 0$

TRAVE AUSILIARIA



Equazione di equilibrio alla rotazione:

Polo B* $\rightarrow -Q^* \cdot \frac{1}{3}l - V_A^* \cdot l = 0$

da cui $V_A^* \cdot l = -Q^* \cdot \frac{1}{3}l$

$$V_A^* = -\frac{1}{3} Q^* = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} ml\right) = -\frac{1}{6} ml$$

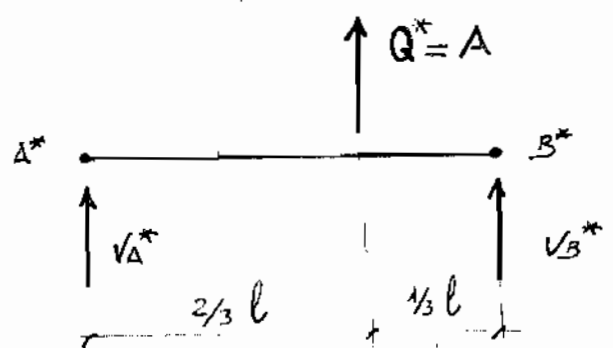
$$V_A^* = -\frac{1}{6} ml \text{ | anche in basso}$$

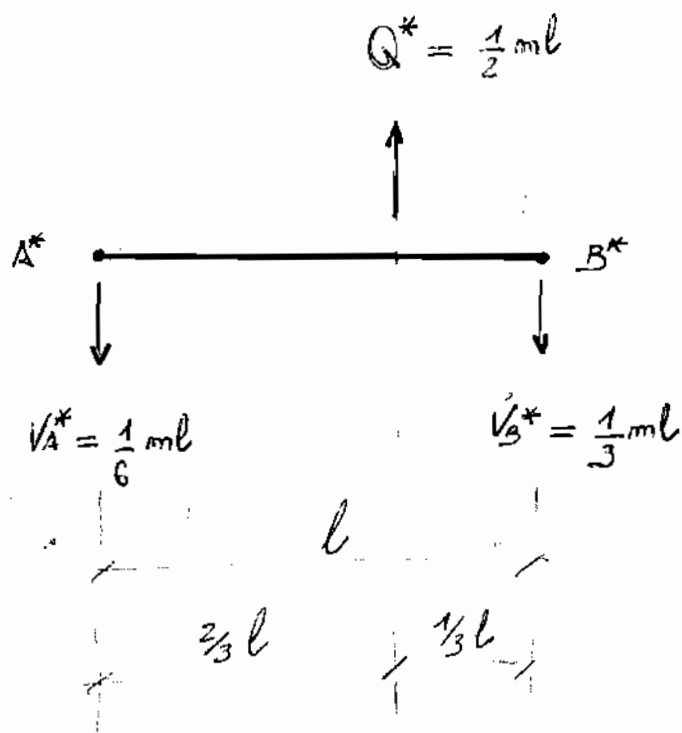
Sostituendo:

LUNGO Y $\rightarrow -Q^* - V_A^* - V_B^* = 0$

$$V_B^* = -Q^* - V_A^* = -\left(\frac{1}{2} ml\right) - \left(-\frac{1}{6} ml\right) = -\frac{1}{3} ml$$

$$V_B^* = -\frac{1}{3} ml \text{ | anche in basso.}$$





Per le Rotazioni si sceglie \odot orario, positivo
come la CONVENZIONE DEL TAGLIO ;

In generale si ha :

$$\gamma = \frac{V^*}{E \cdot J} \quad \text{dove}$$

$V^* \rightarrow$ Reazione Vincolare Ausiliaria
 $E \rightarrow$ Modulo di Young (o di Elasticità)
 $J \rightarrow$ Momento d'Inerzia.

$$\gamma_A = \frac{V_A^*}{EJ} = \left(\frac{1}{6} ml \right) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{1}{6} \frac{ml}{EJ}$$

ma siccome V_A^* genera TAGLIO NEGATIVO (rotazione antioraria),
si avrà rotazione in A altrettanto negativa :

$$\gamma_A = - \frac{1}{6} \frac{ml}{EJ} \quad \text{ROTAZIONE ANTIORARIA in A}$$

dovuta al Taglio negativo.

Poi abbiamo :

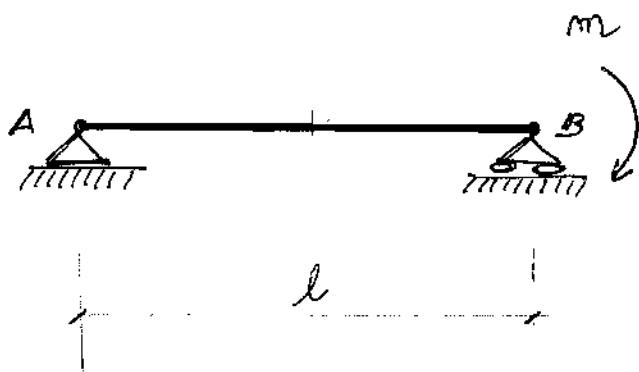
$$\gamma_B = \frac{V_B^*}{EJ} = \left(\frac{1}{3} ml \right) \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{ml}{EJ}$$

e siccome V_B^* genera TAGLIO POSITIVO (rotazione oraria),
si avrà rotazione in B altrettanto positiva :

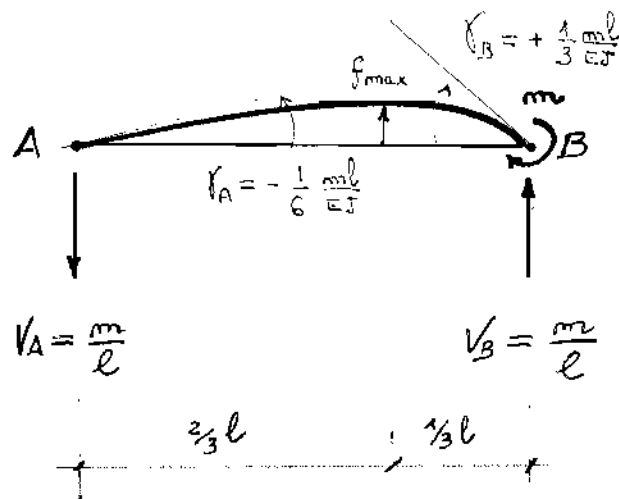
$$\gamma_B = + \frac{1}{3} \frac{ml}{EJ} \quad \text{ROTAZIONE ORARIA in B}$$

dovuta al Taglio Positivo.

TRAVE REALE ASSEGNATA



TRAVE REALE DEFORMATA

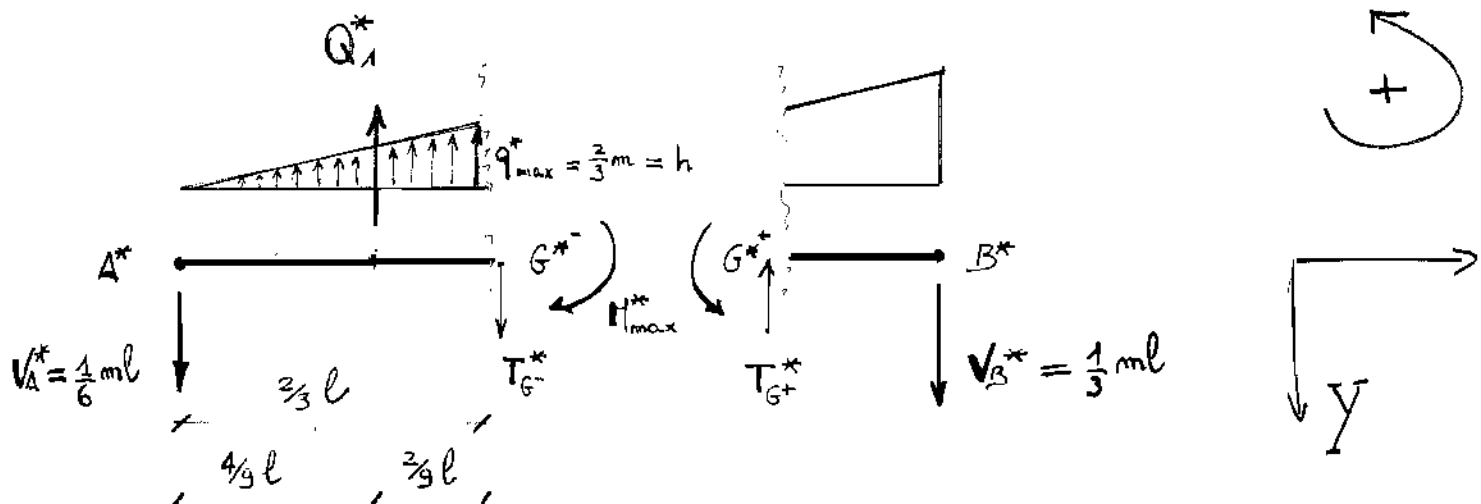


FRECCIA MASSIMA

Calcolare la freccia massima significa determinare il massimo spostamento verticale della trave reale, dato da:

$$f_{max} = \frac{M_{max}^*}{EJ}$$

Calcolare il momento massimo ausiliario, sezionando la trave nel punto di massimo imbarcamento che si verifica in corrispondenza del punto d'applicazione del carico concentrato ausiliario Q^* , ossia:



Il CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO Q_1^* rappresenta la risultante del CARICO RIPARTITO q^* nel tratto A^*-G^* lungo $\frac{2}{3}l$;

in particolare, Q_1^* rappresenta l'area A_1 del carico RIPARTITO q^* avente forma di un triangolo rettangolo che presenta come base la lunghezza del tratto A^*-G^* , ossia $\frac{2}{3}l$, e come altezza quel carico q_{max}^* che si ottiene dal MOMENTO FLETTENTE :

$$M(s) = V_B \cdot s - m \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = -m \cdot l \text{ (in B)} \\ s = \frac{1}{3}l \rightarrow M(s) = V_B \cdot (\frac{1}{3}l) - m \cdot l = -\frac{2}{3}ml \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \end{cases}$$

Quindi, nel punto G^* a $\frac{2}{3}l$ da A^* ed $\frac{1}{3}l$ da B^* , il CARICO RIPARTITO MASSIMO vale :

$$q_{max}^* = \frac{2}{3}ml = h_1$$

e coincide con l'altezza h_1 del triangolo rettangolo di Area :

$$Q_1^* = A_1 = \frac{1}{2}b_1 \times h_1 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}l) \cdot (\frac{2}{3}ml) = \frac{2}{9}ml$$

$$Q_1^* = A_1 = \frac{2}{9}ml$$

TAGLIO AUSILIARIO

Nella sezione G^* compare un TAGLIO AUSILIARIO T_G^* che per l'equilibrio alla traslazione verticale sono :

$$LUNGO Y \rightarrow + T_G^* + V_A^* - Q_1^* = 0$$

dove il taglio è stato scelto convenzionalmente positivo.

9

da cui \rightarrow $T_G^* = Q_1^* - V_A^*$

Sostituendo i valori, si ha:

$$T_G^* = \frac{2}{9} \text{ ml} - \frac{1}{6} \text{ ml} = +\frac{1}{18} \text{ ml} \Rightarrow T_G^* = \frac{1}{18} \text{ ml}$$

Il segno positivo conferma l'aver scelto T_G^* convenzionalmente positivo nella sezione di taglio G^{*-} , che quindi genererà un TAGLIO POSITIVO -

MOMENTO FLETTENTE AUSILIARIO MASSIMO

Scelta un M_{\max}^* convenzionalmente positivo nella sezione di taglio G^{*-} , per l'equilibrio alla rotazione si ha:

POLO G^{*-} $\rightarrow + M_{\max}^* + V_A^* \cdot (\frac{2}{3}l) - Q_1^* \cdot (\frac{2}{9}l) = 0$

da cui $\rightarrow M_{\max}^* = Q_1^* \cdot (\frac{2}{9}l) - V_A^* \cdot (\frac{2}{3}l)$

$$M_{\max}^* = (\frac{2}{9} \text{ ml}) \cdot (\frac{2}{9}l) - (\frac{1}{6} \text{ ml}) \cdot (\frac{2}{3}l)$$

$$M_{\max}^* = \frac{4}{81} \text{ ml}^2 - \frac{1}{9} \text{ ml}^2 = -\frac{5}{81} \text{ ml}^2$$

Il segno negativo del MOMENTO AUSILIARIO MASSIMO, smentisce l'aver scelto M_{\max}^* convenzionalmente positivo nella sezione di taglio G^{*-} (si presentava antiorario), che quindi assumerà un senso di rotazione orario (contrastante il MOMENTO DELLA COPPIA V_A^*, Q_1^* antiorario) tale da generare un MOMENTO NEGATIVO (tende le fibre superiori della trave).

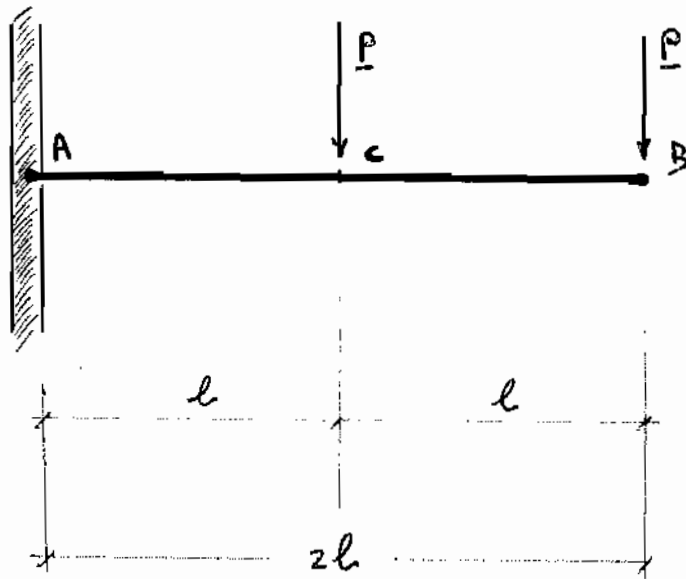
in modulo $M_{\max}^* = \frac{5}{81} \text{ ml}^2 \rightarrow f_{\max} = \frac{5}{81} \cdot \frac{\text{ml}^2}{EJ}$

ESERCIZIO Mensola

①

della 5^a LEZIONE / 28-10-2006

Abbiamo una mensola ad incastro (sistema isostatico) con due forze applicate \underline{P} , una nella sezione C , una all'estremo B come in figura:

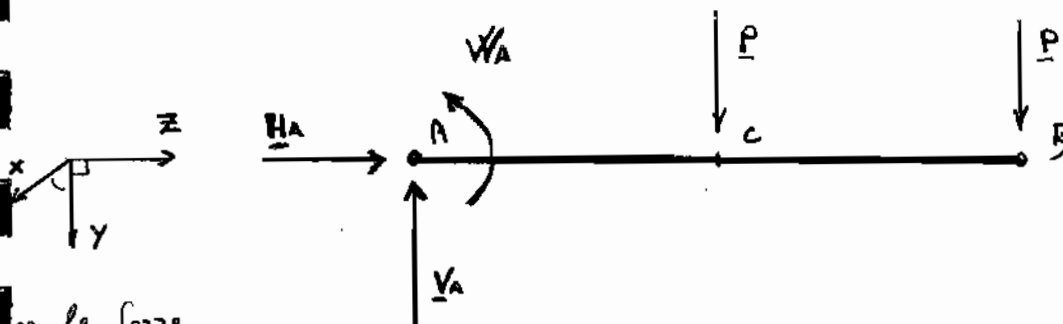


ANALISI ESTERNA:

In A abbiamo l'incastro:

trattasi di un vincolo che impedisce tutti e 3 i tipi di moti possibili, sia trasl. orizzontale, verticale e rotazione (quindi impedisce i 3 gradi di libertà); per tale motivo è un SISTEMA ISOSTATICO;

Dobbiamo sostituire quindi al vincolo incastro le rispettive 3 reazioni vincolari tenendo conto delle due forze applicate \underline{P} :



per i momenti



per le forze

② Consideriamo come riferimento xyz a pag precedente ;
Per l'equilibrio alla trasl. verticale dobbiamo avere che :

$$\underline{P} + \underline{P} - \underline{V}_A = 0$$

$$\underline{V}_A = \underline{P} + \underline{P} = 2\underline{P}$$

$$\boxed{\underline{V}_A = 2\underline{P}}$$

Mentre per l'equilibrio alla trasl. orizzontale abbiamo l'unica condizione :

$$\boxed{\underline{H}_A = 0} \quad \text{non ci sono altre forze orizzontali}$$

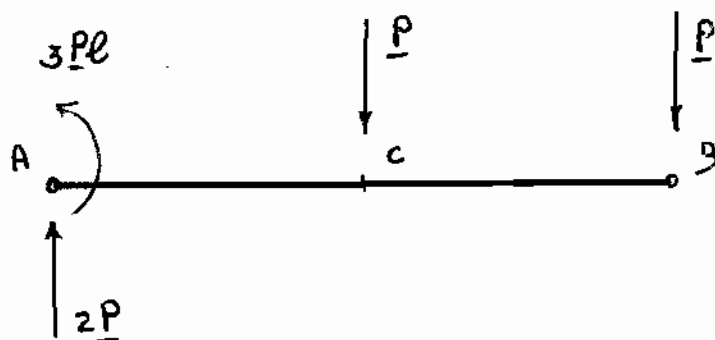
Per l'equilibrio alla rotazione, vediamo quali sono le forze che danno momento rispetto al polo A (che è il nostro vincolo) al fine di trovare la coppia di reazione \underline{W}_A :

$$\underline{W}_A - \underline{P}_c \cdot l - P_3 \cdot 2l = 0$$

$$\underline{W}_A = +\underline{P} \cdot l + \underline{P} \cdot 2l = \underline{P} \cdot l (1+2) = 3\underline{P} \cdot l$$

$$\boxed{\underline{W}_A = 3\underline{P} \cdot l}$$

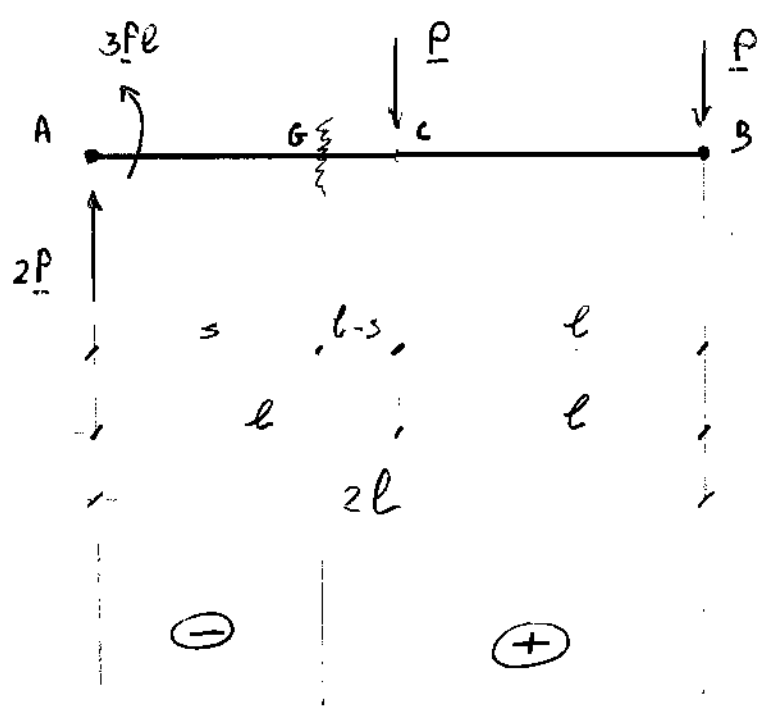
il sistema diventa :



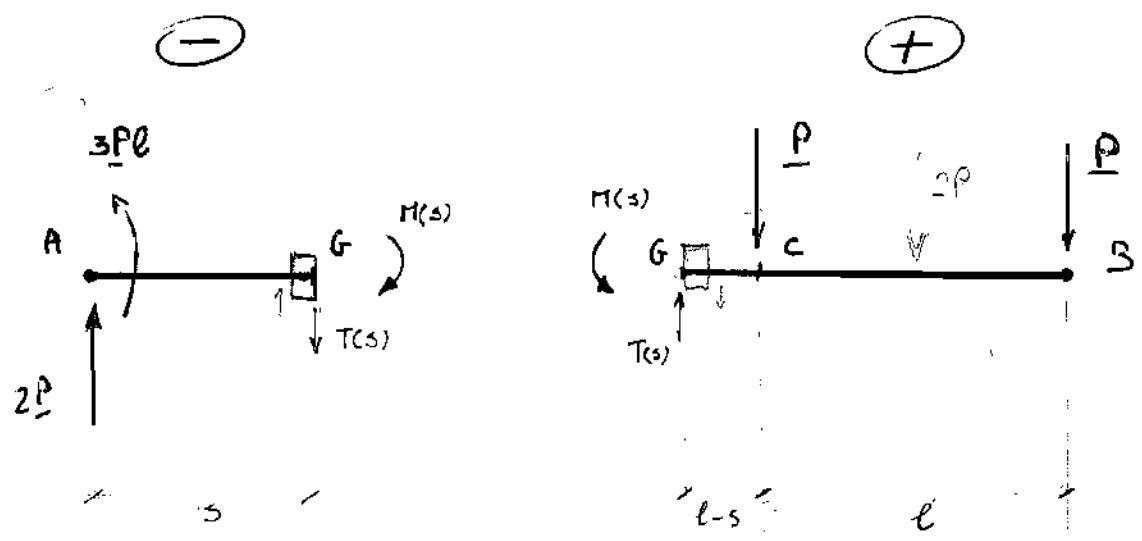
ANALISI INTERNA

(3)

Per poter disegnare i DIAGRAMMI (Normale, Taglio e Momento Flettente) abbiamo bisogno di fare una ANALISI INTERNA della trave andando a tagliare questa in due punti arbitrari, prima e dopo la sezione di mezzera C, ossia:



~~...~~



$\text{cto } \ominus$
 $\text{plo } \ominus \rightarrow -2P \cdot s + 3P \cdot l = M(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow M(s) = 3Pl \\ s=l \rightarrow M(s) = +Pl \end{array} \right.$

$\text{cto } \oplus$
 $-P \cdot (l-s) - P \cdot (2l-s) = M(s)$
 $-Pl + P \cdot s - 2Pl + P \cdot s = M(s) \Rightarrow +2Ps - 3Pl = M(s)$

④

CONVENZIONE DEL TAGLIO $T(s)$



per notazione
oraria
il Taglio è Positivo

Quindi tagliando alla sinistra della mezzera C, in ogni sezione che prendiamo (ogni cubetto di materiale) il taglio è positivo e vale:

$$T(s) = + 2P$$

come reazione alla forza verticale in A:



CONVENZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE $M(s)$:

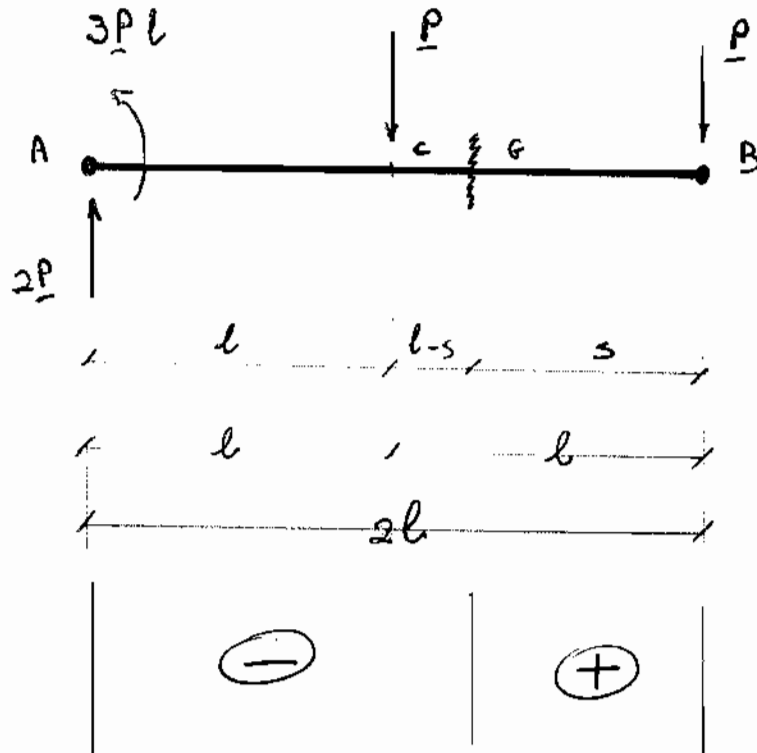
Quindi tagliando alla sinistra della mezzera C, in ogni sezione che prendiamo, il momento flettente $M(s)$ compare

$$M(s) = 2P \cdot s - 3P \cdot l \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per } s=0 \Rightarrow M(s) = -3Pl \\ \text{per } s=l \text{ (in mezzera)} \Rightarrow M(s) = -P \cdot l \end{array} \right.$$

da cui si deduce che il momento flettente $M(s)$ è negativo alle sinistra della mezzera C -

Tagliamo la trave alla destra della NEZZERA C

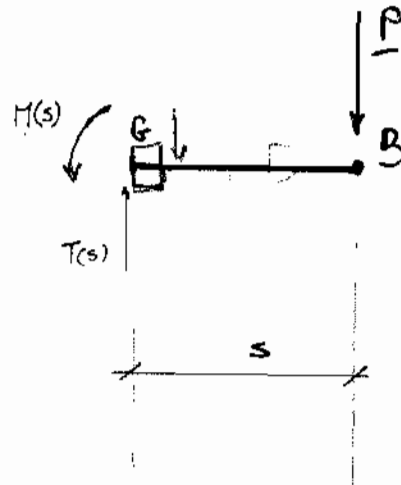
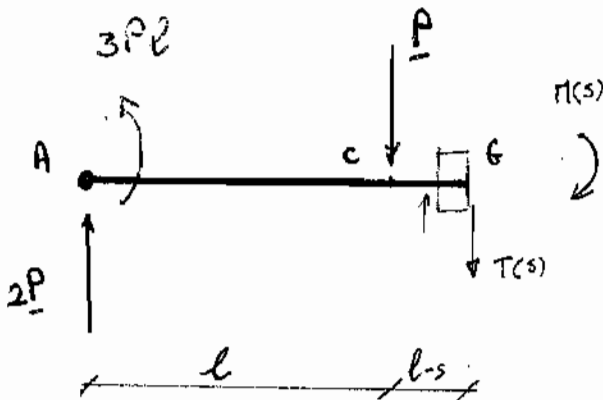
(5)



(-)

(+)

Forze



Momenti

(+)

$$+3Pl - 2P \cdot (2l - s) + P \cdot (l - s) - \pi(s) = 0$$

$$= Pl - 4Pl + 2Ps + Pl - Ps - \pi(s) =$$

$$-3Pl + 2Ps - \pi(s) = 0$$

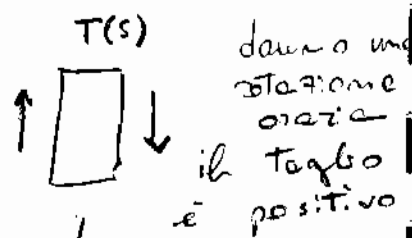
$$\boxed{\pi(s) = +Ps}$$

considerando il lato (-) con polo G

⑥

CONVENZIONE DEL TAGLIO $T(s)$:

Quindi tagliando alla destra delle carrerie C , in ogni sezione di taglio di predizione (ogni carico di materiale), il taglio $T(s)$ è positivo e vale :

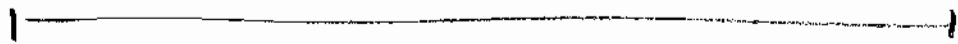


$T(s) = + \underline{P}$

$-T(s) + P = 0$

$-T(s) = -P \Rightarrow T(s) = +P$

come reazione alle forze applicate \underline{P} in verticale nell'estremo B ;



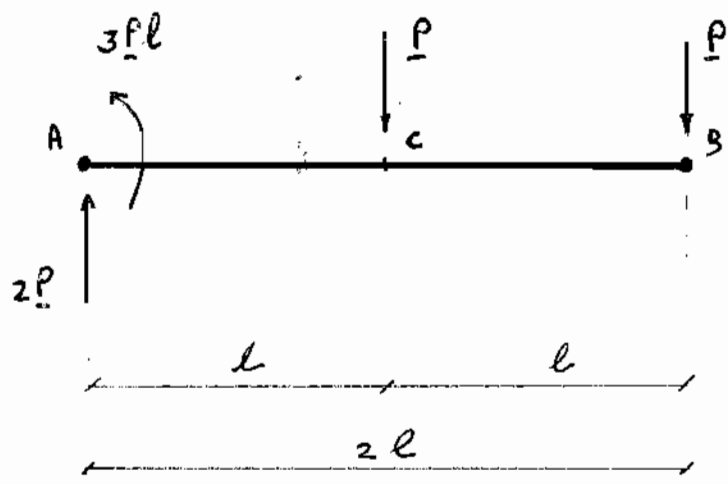
CONVENZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE $M(s)$:

Quindi tagliando alla destra delle carrerie C , in ogni sezione di taglio di predizione, il momento flettente $M(s)$, compare come reazione alla coppia di forze P in (B) e $T(s)$ in (G) , oraria, ed è quindi antiorario e vale :

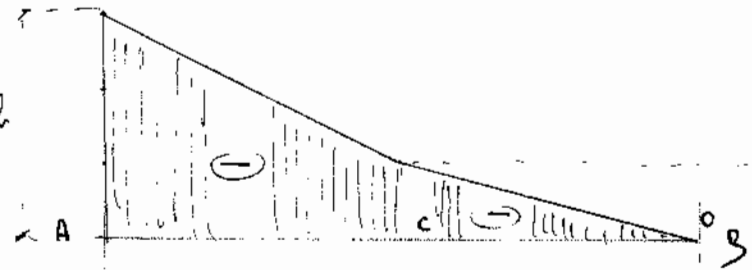
con polo in $G \Rightarrow +M(s) - P \cdot s = 0$

$M(s) = + \underline{P} \cdot s$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } s=0 \text{ (in } B) \Rightarrow M(s) = 0 \\ \text{se } s=l \Rightarrow M(s) = + \underline{P} \cdot l \end{array} \right.$

GR DIAGRAMMA : Normale (N), Taglio (T) e Momento Flettente (M)



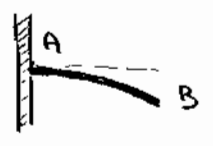
Taglio



Momento

mezzetta

il Momento è negativo in quanto, sia a destra che a sinistra della sezione di mezzetta C, le fibre tese sono quelle superiori della mensola, ossia la mensola si flette verso il basso



lato (+) $\rightarrow + \underline{\pi}(s) - P \cdot (l-s) - P(2l-s) = 0$

$$\underline{\pi}(s) - Pl + Ps - 2Pl + Ps = 0$$

$$\underline{\pi}(s) - 3Pl + 2Ps = 0$$

$$\boxed{\underline{\pi}(s) = 3Pl - 2Ps}$$

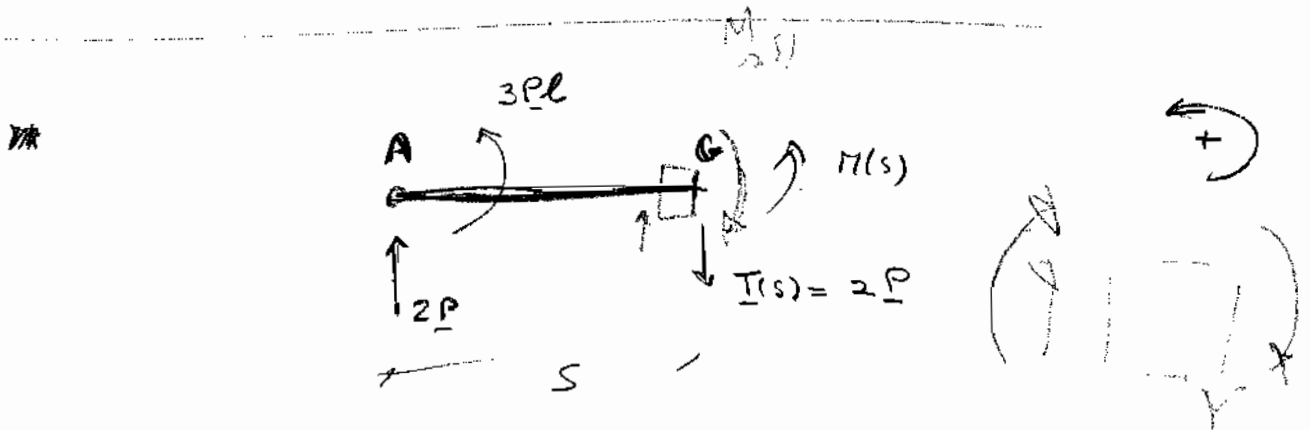
lato (-)

$$- \underline{\pi}(s) + 3Pl - 2Ps = 0$$

$$\boxed{\underline{\pi}(s) = 3Pl - 2Ps}$$

lato (-)

polo A $\rightarrow + 3Pl - 2P \cdot s = \underline{\pi}(s)$



~~polo in G~~

~~$\underline{\pi}(s)$~~

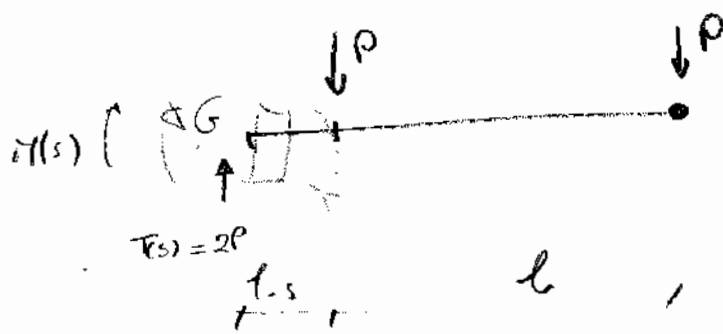
EQ. ai MOMENTI (polo G)

$$- \underline{\pi}(s) - 2P \cdot s + 3Pl = 0$$

$$\boxed{\underline{\pi}(s) = 2Ps - 3Pl}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow \underline{\pi}(s) = -3Pl \\ s=l \rightarrow \underline{\pi}(s) = -Pl \end{array} \right.$$

$$\underline{\pi}(s) = 3Pl - 2Ps \quad \underline{\pi}(s)$$



$$\text{pelo } G \rightarrow + \pi(s) - P \cdot (l-s) - P(2l-s) = 0$$

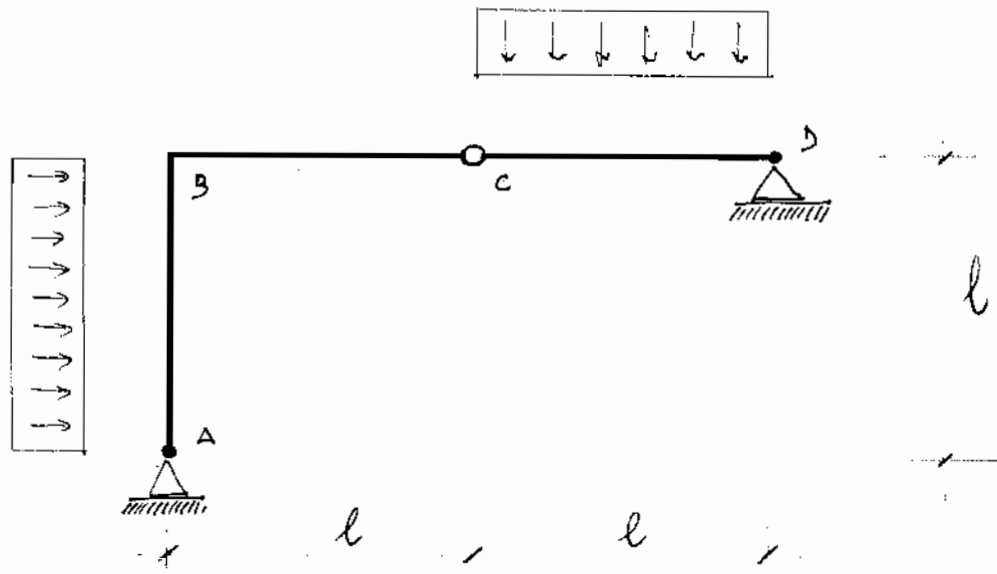
$$-\pi(s) - P \cdot l + P_s - 2Pl + P_s = 0$$

$$-\pi(s) - 3Pl + 2P_s = 0$$

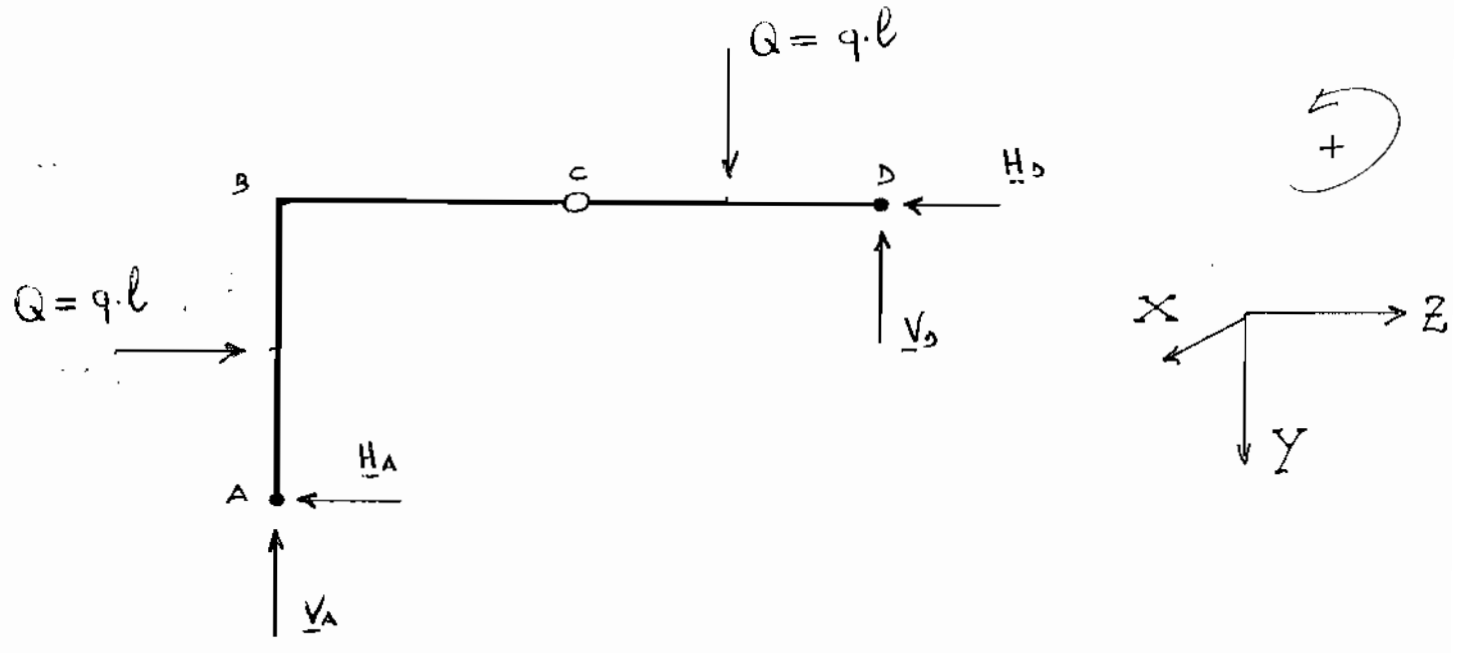
$$\boxed{\pi(s) = + 2P_s - 3Pl} \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow \pi(s) = -3Pl \\ s=l \rightarrow \pi(s) = -Pl \end{array} \right.$$

ESERCIZIO DI ISOSTATICA

della 20° LEZIONE



Sostituendo le reazioni vincolari ai due vincoli appoggio con armiere, si ottiene:



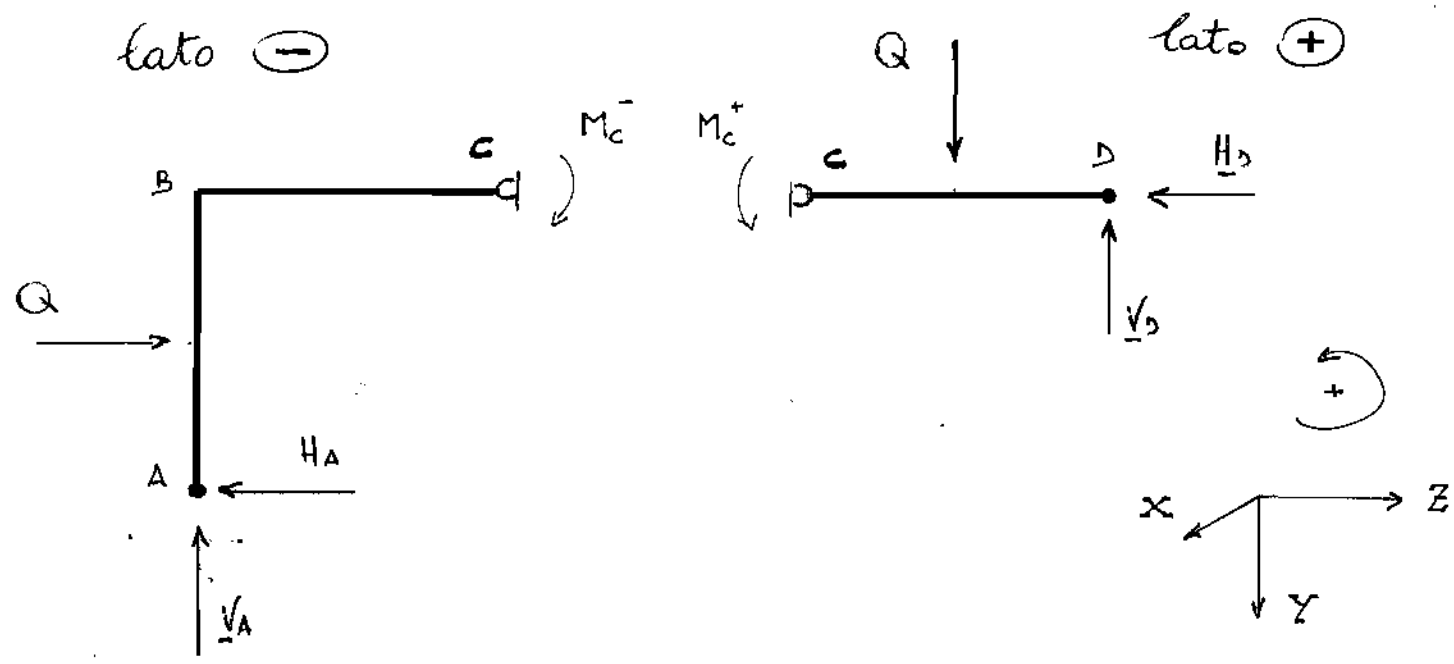
dove i versi delle 4 reazioni vincolari sono stati scelti convenzionalmente (successivamente verranno determinati) e dove abbiamo sostituito ai due carichi ripartiti q, i due carichi concentrati: Q -

Scriviamo l'equazione di equilibrio alle traslazioni orizzontale e verticale :

$$\begin{aligned} \text{LUNGO } Z &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} + Q - H_D - H_A &= 0 \\ + Q - V_A - V_D &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Abbiamo due equazioni in quattro incognite e pertanto è necessario scrivere altre due equazioni ;

Supponiamo di separare la struttura in corrispondenza della cerniera interna C , ossia :



ci notiamo che , come conseguenza della separazione compaiono in C due momenti di reazione che si elidono tra loro , ma fanno sì che la struttura venga analizzata staticamente come se fosse l'unione di due ~~STRUTTURE~~ STRUTTURE ISOSTATICHE .

Quindi scriviamo ora le due equazioni di equilibrio alla rotazione, per il lato \ominus e per il lato \oplus con la condizione che nella CERNIERA INTERNA C si annulli il Momento Flettente, ossia:

$$M_c^- + M_c^+ = 0$$

$$\text{Polo C} \begin{cases} \text{lato } \ominus \rightarrow + Q \cdot (l/2) - H_A \cdot (l) - V_A \cdot (l) = 0 \\ \text{lato } \oplus \rightarrow - Q \cdot (l/2) + V_B \cdot (l) = 0 \end{cases}$$

dove, H_B non genera momento in quanto ha braccio nullo (la sua retta d'applicazione passa proprio per C) -

Notiamo che, l'equazione per il lato \ominus non è risolvibile in quanto è in due incognite, mentre per il lato \oplus è risolvibile.

Mettiamo ora a sistema tutte e 4 le equazioni che possiamo essere risolte e formiamo le 4 incognite dell'intera STRUTTURA IPERSTATICA:

$$\begin{cases} \text{LUNGO Z} & + Q - H_B - H_A = 0 \\ \text{LUNGO Y} & + Q - V_A - V_B = 0 \\ \text{LATO } \ominus & + Q \cdot (l/2) - H_A \cdot (l) - V_A \cdot (l) = 0 \\ \text{LATO } \oplus & - Q \cdot (l/2) + V_B \cdot (l) = 0 \end{cases}$$

da cui, risolvendo l'ultima equazione, si ottiene:

$$-Q(l/2) + V_B \cdot (l) = 0$$

$$V_B \cdot \cancel{l} = Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} Q \cdot l \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = +\frac{1}{2} Q}$$

Il risultato positivo conferma il verso di V_B scelto convenzionalmente verso l'alto.

Sostituendo ora nell'equazione di equilibrio alla trasl. verticale, si ottiene:

$$\text{LUNGO Y} \rightarrow + Q - V_A - V_B = 0$$

$$V_A = Q - V_B = Q - \frac{1}{2} Q = +\frac{1}{2} Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = +\frac{1}{2} Q}$$

Anche V_A va verso l'alto.

Sostituendo ora V_A nell'equazione di equilibrio alla rotazione, si ottiene:

$$\text{LATO } \ominus \rightarrow + Q \cdot (l/2) - H_A \cdot l - V_A \cdot l = 0$$

$$H_A \cdot l = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot l - V_A \cdot l = \frac{1}{2} Q \cdot l - \left(\frac{1}{2} Q\right) \cdot l = 0$$

$$H_A \cdot l = 0 \rightarrow \boxed{H_A = 0}$$

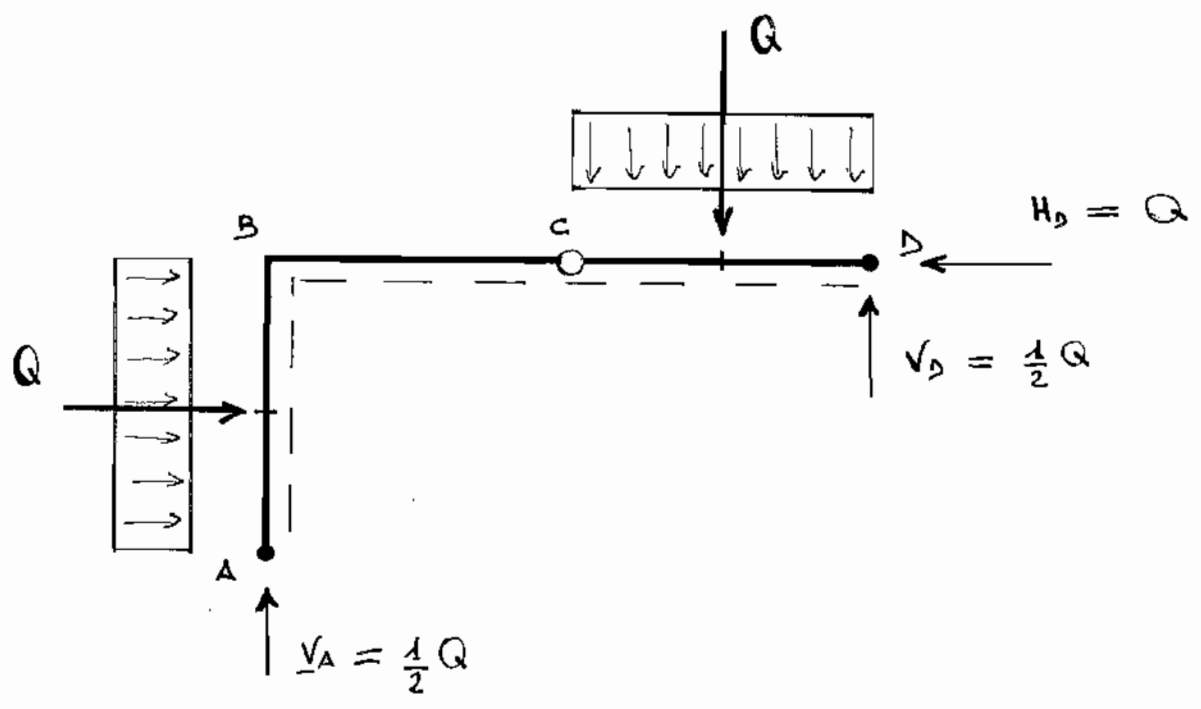
Ci rimane da sostituire questo risultato nell'equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale, ossia:

$$\text{LUNGO } Z \rightarrow + Q - H_D - H_A = 0$$

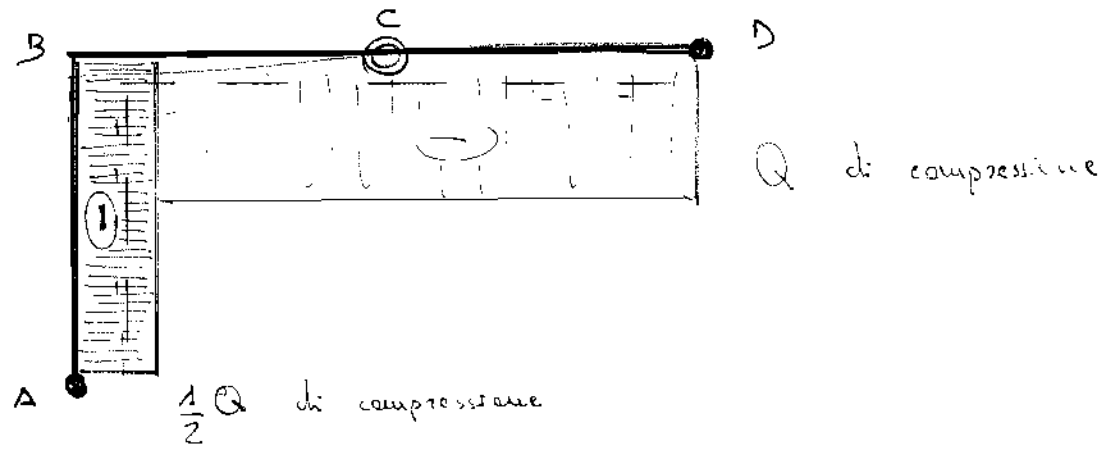
$$H_D = + Q - H_A = Q - 0 = Q \rightarrow \boxed{H_D = Q}$$

Il risultato positivo conferma la scelta convenzionale del verso di H_D .

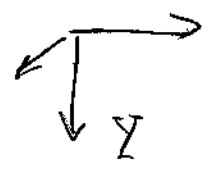
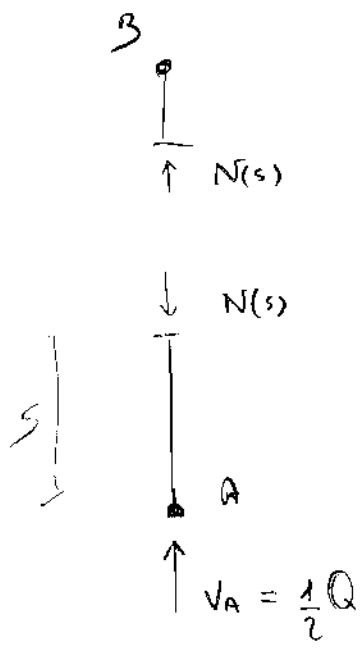
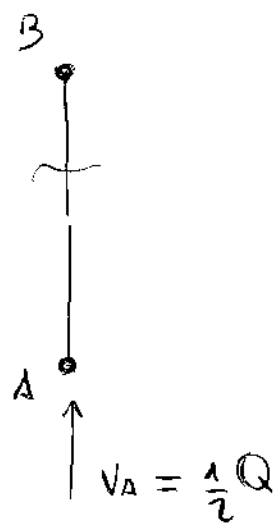
In conclusione, abbiamo il seguente SCHEMA STATICO:



dove la linea tratteggiata in viola all'interno della struttura, rappresenta la LINEA DI RIFERIMENTO, scelta convenzionalmente per dare un segno ai grafici della Normale, del Taglio e del Momento Flettente.



Tratto AB

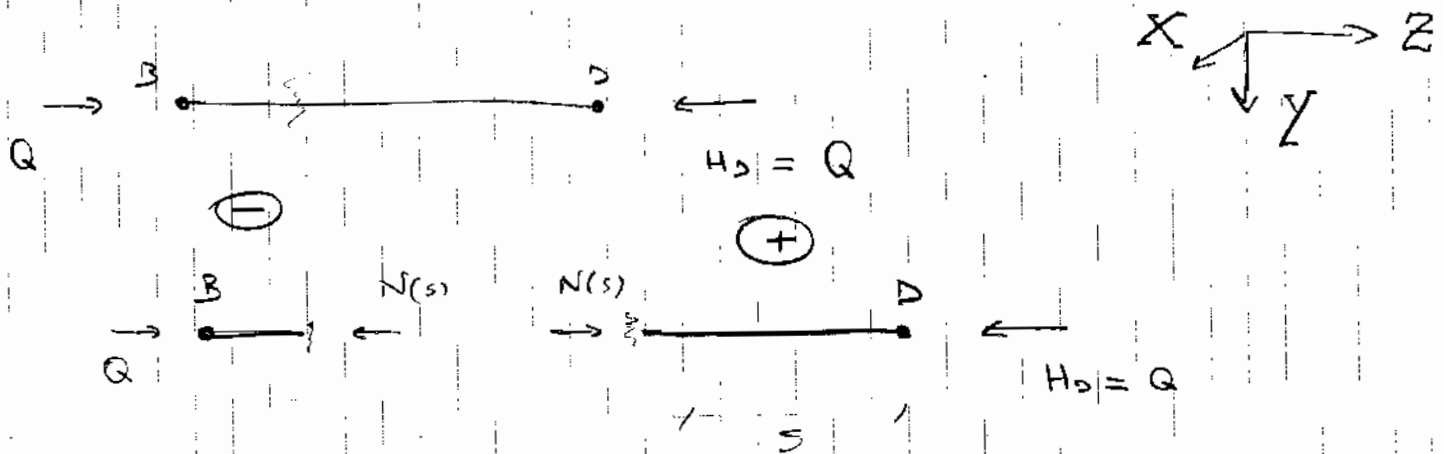


LUNGO $Y \rightarrow + N(s) - V_A = 0$

$N(s) = V_A = \frac{1}{2} Q$ di compressione

va' disegnato dalla parte delle linee di riferimento.

Ricordando che la CERNIERA INTERNA C
trasferisce lo sforzo Normale da un tratto
all'altro, consideriamo il TRATTO BD come se
non ci fosse la cerniera interna C e quindi come
se fosse un'unica trave:



LATO (+)

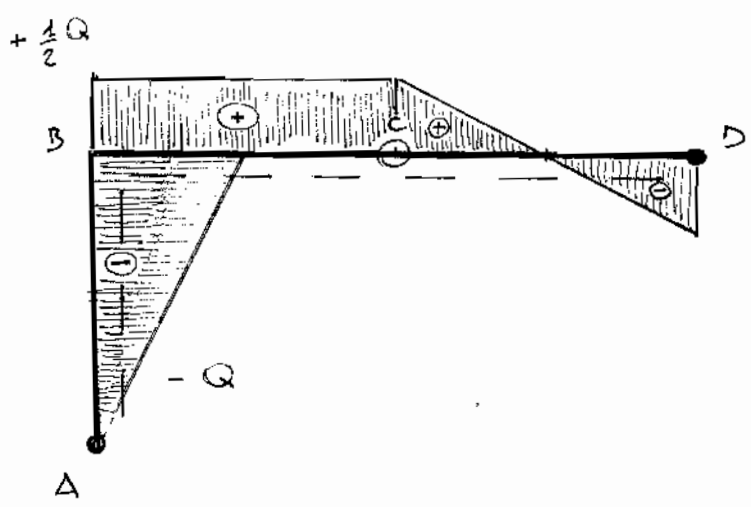
lungo $Z \rightarrow$

$$+ N(s) - H_D = 0$$

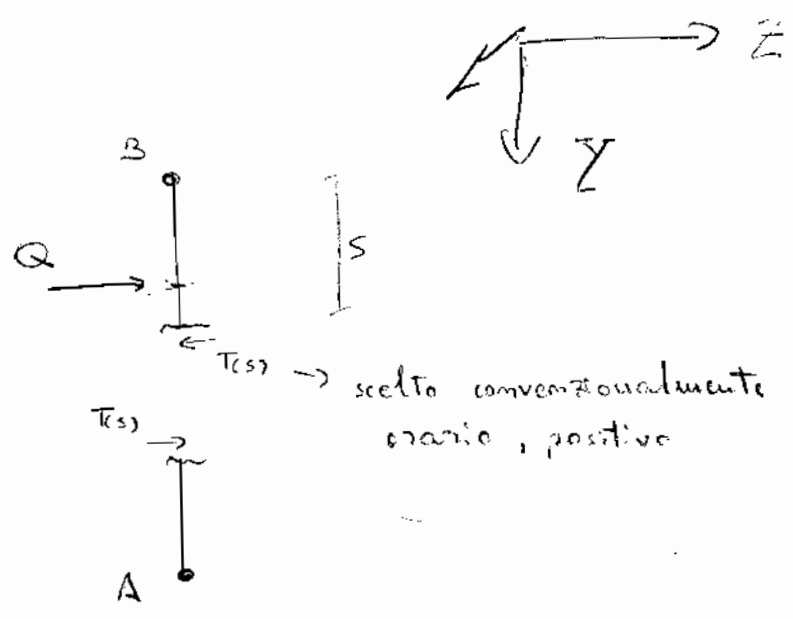
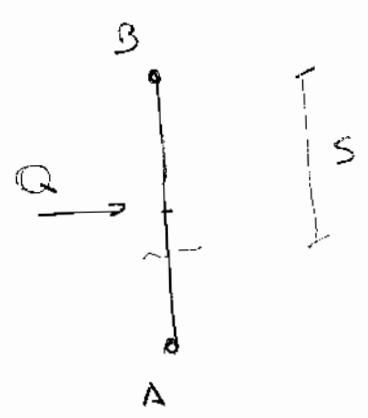
$$N(s) = H_D = Q \quad \text{di compressione}$$

Il segno positivo del risultato conferma il verso
di $N(s)$, ma lo sforzo è di compressione,
quindi negativo e va disegnato dalla parte
delle linee di riferimento;

TAGLIO



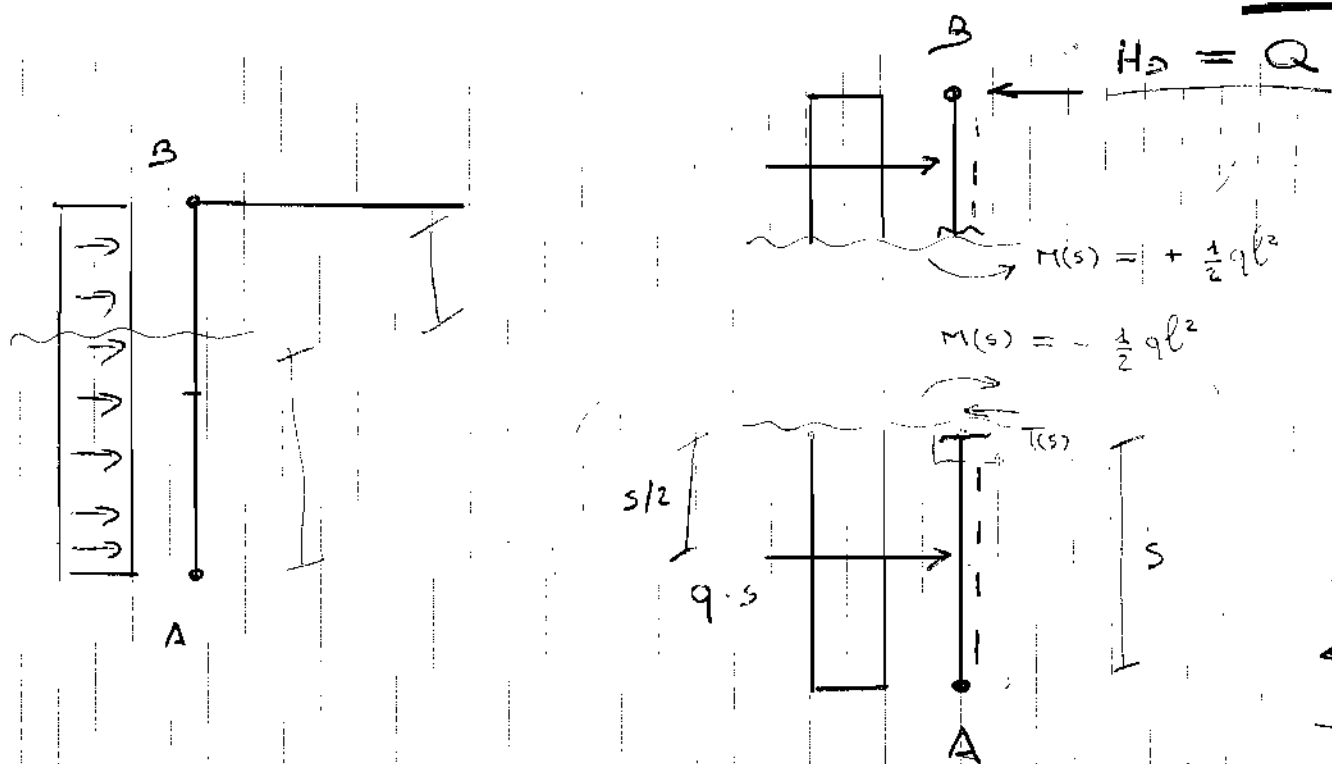
TRATTO AB



LUNGO Z $\rightarrow +Q - T(s) = 0$

$T(s) = Q$ conferma il verso

Il taglio è orario e per la convenzione risulta positivo.



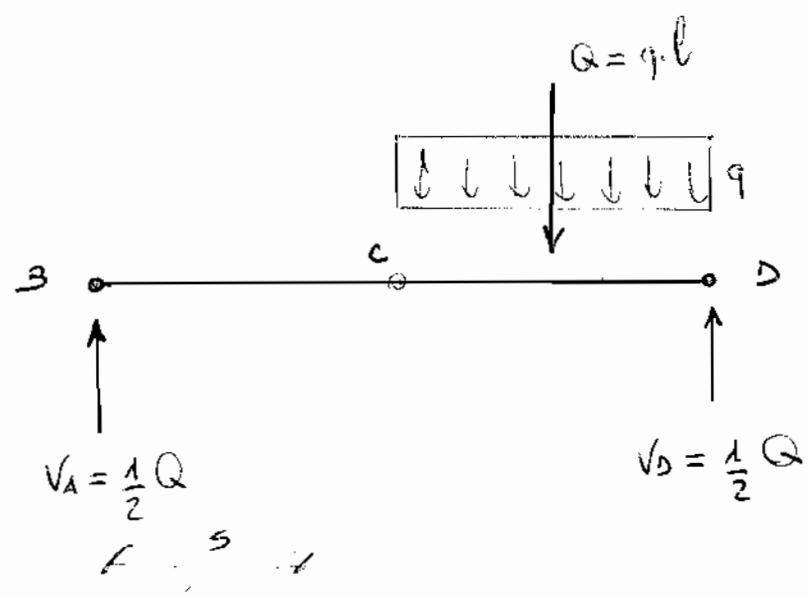
$$\begin{aligned}
 -T(s) + q \cdot s - H_D &= 0 \\
 T(s) &= q \cdot s - H_D = q \cdot s - Q \\
 s=0 &\rightarrow T(s) = -Q \\
 s=l &\rightarrow T(s) = ql - ql = 0
 \end{aligned}$$

lungo Z $\rightarrow +T(s) + q \cdot s = 0$

$$\boxed{T(s) = -q \cdot s} \begin{cases} s=0 \rightarrow T(s) = 0 \\ s=l \rightarrow T(s) = -ql = -Q \end{cases}$$

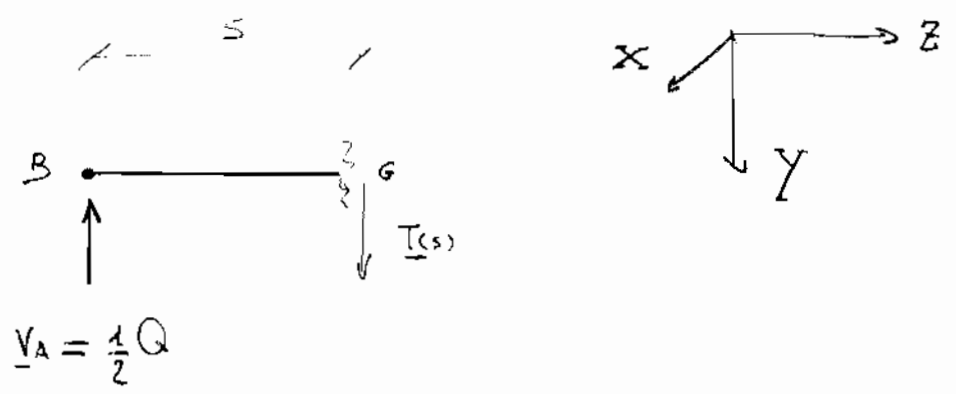
Il segno negativo smantisce la scelta di $T(s)$ convenzionalmente positivo (orario); pertanto sarà disetto nel verso opposto, quindi negativo (antiorario) per il cono in sezione; si disegna dal lato della linea di riferimento.

TRATTO BD



Studiamo questo tratto come se fosse una TRAVE SEMPLICE, quindi analizzandolo cioè che si trova alla sinistra della CERNIERA INTERNA C e alla destra.

Facciamo una sezione alla sinistra di C :



LUNGO Y → $+ T(s) - V_A = 0$

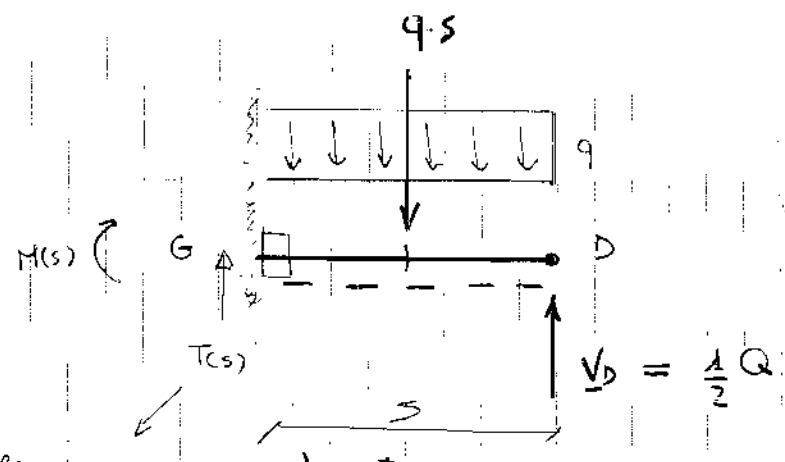
$T(s) = V_A = \frac{1}{2} Q \rightarrow T(s) = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} q \cdot l$

Il segno positivo del risultato, conferma il verso di $T(s)$ nella sezione; ora, questo taglio per la convenzione genera una rotazione oraria del cono in sezione e pertanto un taglio positivo.

Quindi facendolo variare S da B a C, il diagramma del taglio presenta un andamento lineare costante positivo.

Partendo dall'estremo D, sezioniamo prima di C

~~ql~~
 $ql - \frac{1}{2}ql$



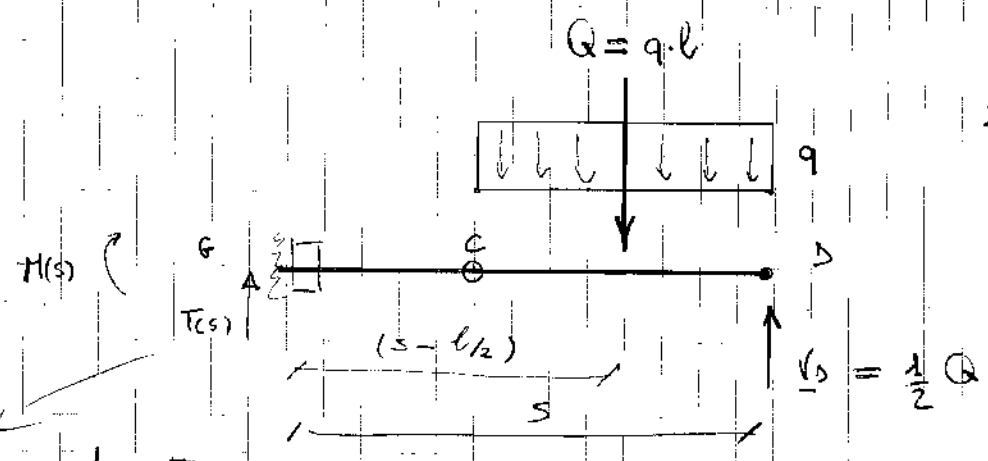
scelto convenzionalmente
positivo (rotazione oraria del cavo in sezione)

LUNGO Y $\rightarrow + q \cdot s - V_D - T(s) = 0$

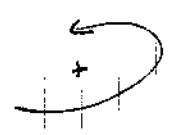
$T(s) = q \cdot s - V_D = q \cdot s - \frac{1}{2}Q$

$T(s) = q \cdot s - \frac{1}{2}Q \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow T(s) = -\frac{1}{2}Q \\ s=l \rightarrow T(s) = ql - \frac{1}{2}ql = +\frac{1}{2}ql \end{array} \right.$

Partendo dall'estremo D, sezioniamo dopo C



scelto convenzionalmente
positivo (rotazione oraria del cavo in sezione)



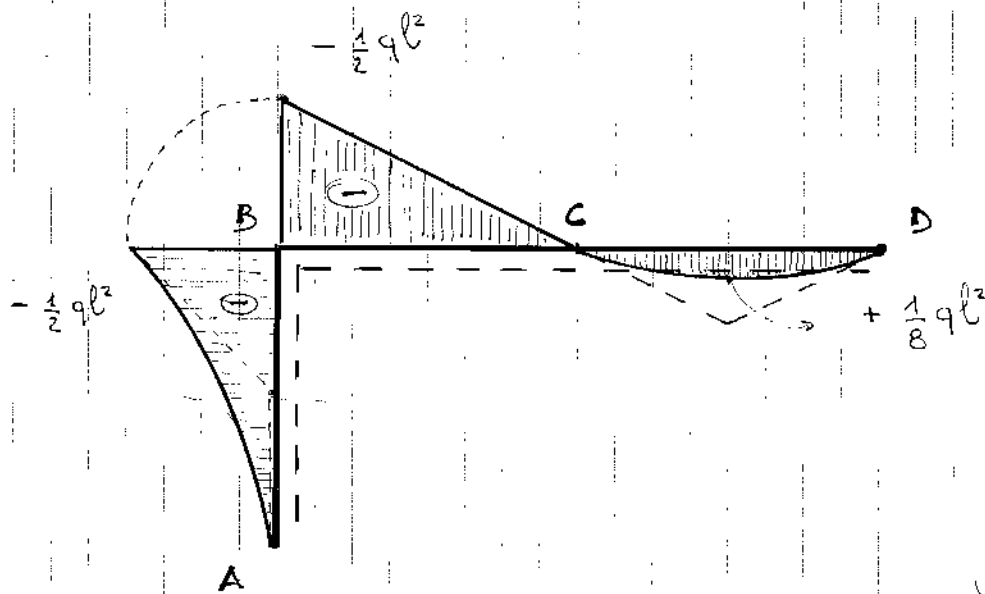
$$\text{LUNGO } Y \rightarrow + Q - V_D - T(s) = 0$$

$$T(s) = Q - V_D = Q - \frac{1}{2}Q = ql - \frac{1}{2}ql = + \frac{1}{2}ql$$

$$\boxed{T(s) = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}Q}$$

Quindi, facendo variare s da C a B ,
 abbiamo un TAGLIO POSITIVO, ~~che~~ con
 legge lineare costante di modulo $\frac{1}{2}Q$

MOMENTO FLETTENTE



TRATTO AB :

Scegliamo $M(s)$ positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE :

POLO G $\rightarrow + M(s) + q s \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = 0$

$$M(s) + \frac{1}{2} q \cdot s^2 = 0$$

$$M(s) = -\frac{1}{2} q s^2$$

$$s = 0 \rightarrow M(s) = 0$$

$$s = l \rightarrow M(s) = +\frac{1}{2} q l^2$$

Il risultato negativo derivante dall'equazione di equilibrio alle rotazioni, smentisce l'aver scelto convenzionalmente il momento flettente $M(s)$ in sezione G che pertanto va cambiato in senso orario.

Mentre i due risultati ottenuti facendo variare s tra A e B, sono esplicitamente quelli da riportare nel diagramma e derivano direttamente dalla scelta convenzionale di $M(s)$.

TRATTO DC

Scegliamo $M(s)$ positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE :

$$\text{POLO G} \rightarrow -M(s) - q \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + V_0 \cdot (s) = 0$$

$$M(s) = V_0 \cdot s - \frac{1}{2} q s^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \quad (\text{in D}) \\ s=l/2 \rightarrow M(s) = +\frac{1}{8} q l^2 \quad (\text{in mezzecia}) \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \quad (\text{in C}) \end{array} \right.$$

L'equazione mom ci aiuta a capire il segno del Momento Flettente ;

mentre, il segno positivo del risultato nelle mezzecie.

di questo tratto CD, ci esplicita l'andamento del diagramma e deriva direttamente dall'aver scelto per convenzione $M(s)$ positivo (tende le fibre dalla parte delle linee di riferimento) all'inizio.

Abbiamo un andamento parabolico del Momento Flettente in quanto è la variabile s che risulta definita da una legge quadratica.

TRATTO CB :

Scegliamo $M(s)$ positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE :

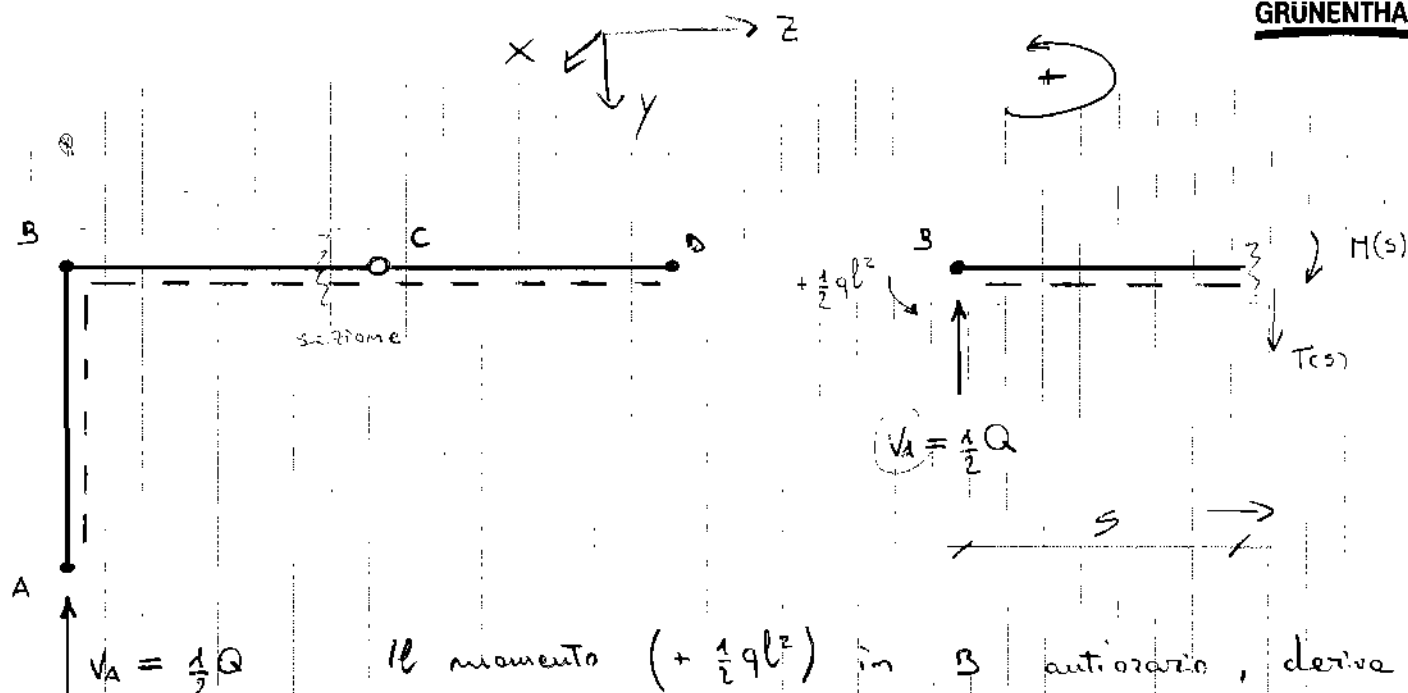
$$\text{POLO G} \rightarrow -M(s) - Q \cdot \left(s - \frac{l}{2}\right) + V_0 \cdot (s) = 0$$

$$-M(s) - q l \cdot \left(s - \frac{l}{2}\right) + q l \cdot s = 0$$

$$-M(s) - \cancel{q l s} + \frac{1}{2} q l^2 + \cancel{q l s} = 0$$

$$M(s) = \frac{1}{2} q l^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} s=l \rightarrow M(s) = \\ s=2l \end{array} \right.$$

TRATTO BC : $0 \leq s \leq l$



Il momento $(+\frac{1}{2}ql^2)$ in B antiorario, deriva dall'analisi interna del TRATTO AB ed è necessario considerarlo ai fini dell'equilibrio nel nodo B ;
 Scelgo $M(s)$ positivo per la convenzione delle fibre :

~~Equilibrio~~

$$+ M(s) - V_A \cdot (s) + \frac{1}{2}ql^2 = 0$$

$$M(s) = V_A \cdot (s) - \frac{1}{2}ql^2 = \frac{1}{2}qls - \frac{1}{2}ql^2$$

$$M(s) = \frac{1}{2}qls - \frac{1}{2}ql^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow M(s) = -\frac{1}{2}ql^2 \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \end{array} \right.$$

Il segno negativo del risultato è direttamente quello da riportare nel grafico (andamento lineare del momento flettente nel tratto BC) e deriva dall'aver scelto convenzionalmente positivo $M(s)$ all'inizio ;

inoltre, questo segno negativo ci dice che il senso di rotazione di $M(s)$ nella sezione di taglio sarà orario -

~~Il~~ In questo tratto non abbiamo un andamento parabolico in quanto la variabile s non è definita da una legge quadratica.

ESERCIZIO Portale con due appoggi-cerniera alla base

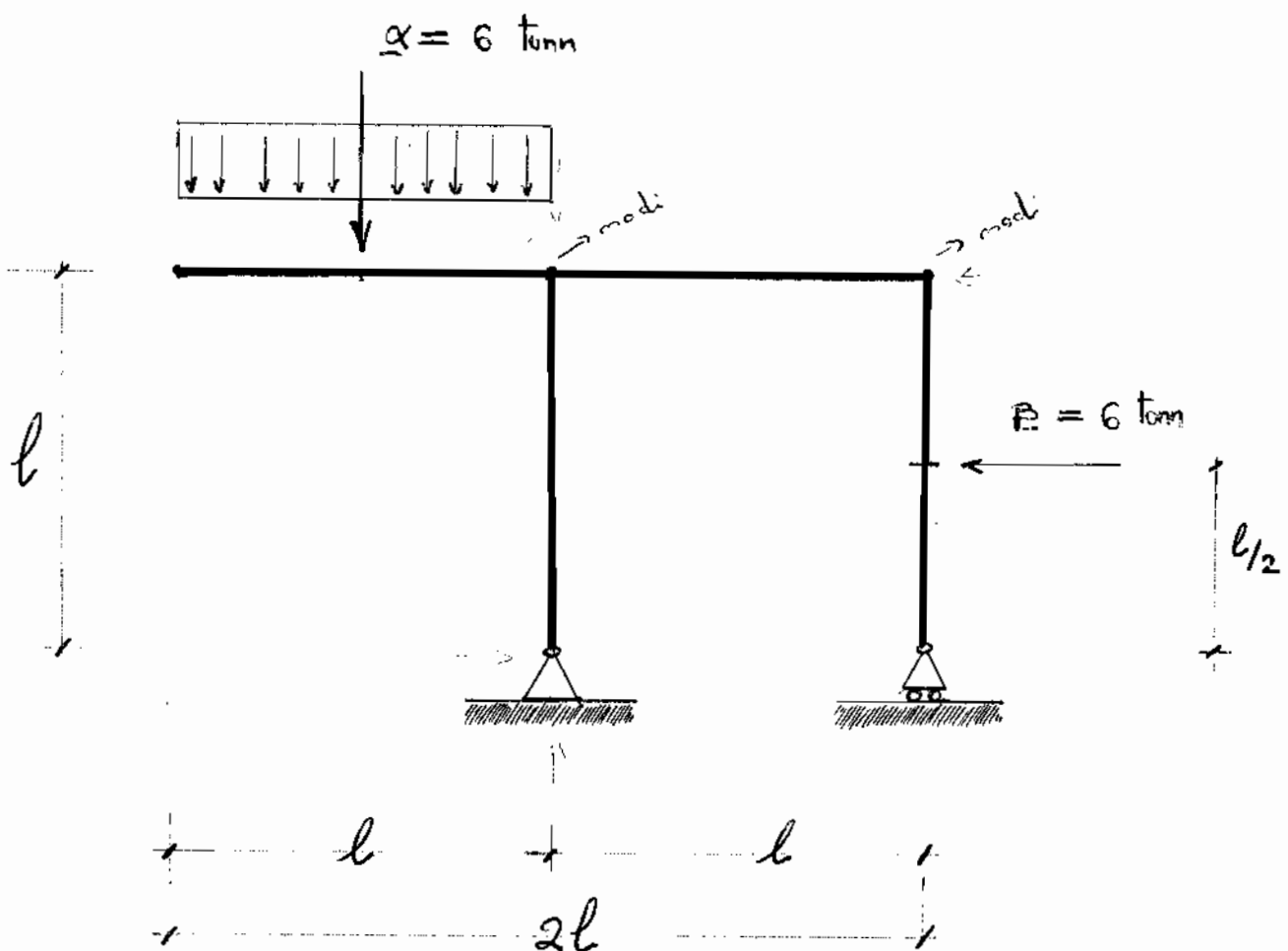
1

del 1° ESERCIZIO, in data 16-11-2006, risolto nella 10^a LEZIONE.

Abbiamo un PORTALE, costituito da due pilastri di dimensione l da terra, disposti in verticale su due basi, rappresentanti un APPOGGIO-CERNIERA ed un CARRELLI-CERNIERA; inoltre questi due pilastri verticali, risultano essere distanti tra loro di una dimensione sempre $l = 5$ metri -

Sul pilastro di destra, e' applicato un CARICO CONCENTRATO P nella sezione di mezz'aria M , che presenta direzione normale al pilastro, verso entrante e modulo 6 tonn -

A completare la struttura, vi e' una Trave orizzontale lunga $2l$, la cui meta' sporge sul lato sinistro e su questo tratto e' applicato un CARICO RIPARTITO $q \cdot l = \alpha$ tonn, in cui $\alpha = 6$ tonn -



ANALISI ESTERNA

2

Notiamo che, abbiamo un vincolo APPOGGIO-CERNIERA, il quale impone due condizioni cinematiche:

la Trasl. verticale ed orizzontale;

garantisce invece la sola rotazione dovuta alla CERNIERA impedendo così i due moti possibili di Traslazione, verticale ed orizzontale -

Infatti se trascuriamo il CARRELLO-CERNIERA, la struttura presenta 1 solo grado di libertà su 3, in quanto gli altri 2 moti possibili sono impediti -

L'altro pilastro ha come base un CARRELLO-CERNIERA, il quale impone una sola condizione cinematica:

la Trasl. verticale;

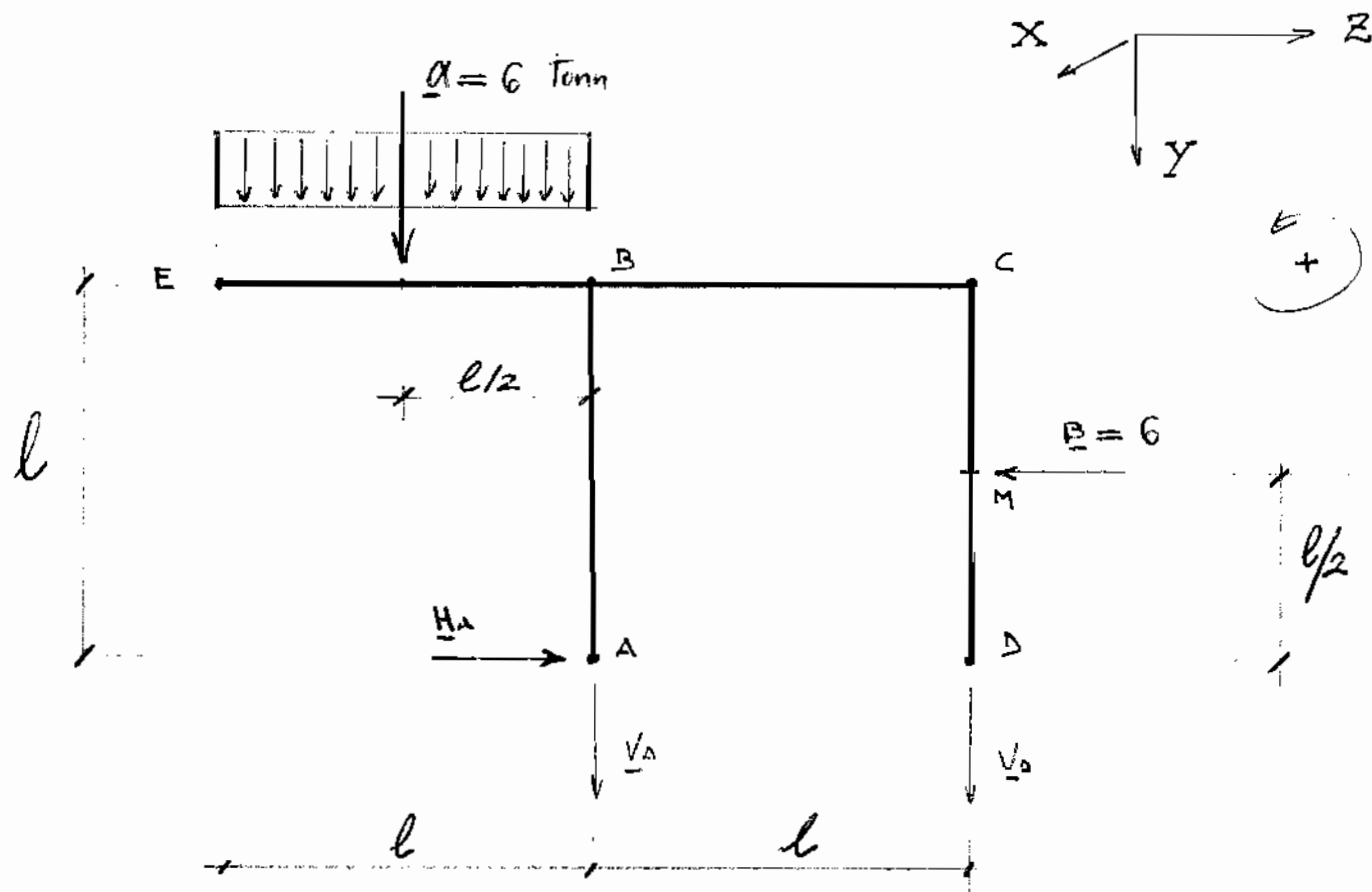
garantisce invece gli altri 2 moti possibili nel piano, ossia la rotazione (dovuta alla cerniera) e la Trasl. orizzontale (dovuta al carrello), nell'ipotesi in cui si trascuri l'APPOGGIO-CERNIERA -

In tale ipotesi, la struttura presenterebbe 2 gradi di libertà su 3, in quanto la trasl. verticale è impedita -

Nel complesso abbiamo 3 gradi di libertà e 3 vincoli (come nel caso di una TRAVE SEMPLICE); trattasi di un SISTEMA ISOSTATICO -

SCHEMA STATICO

Per determinare lo schema statico, abbiamo bisogno di sostituire i 3 vincoli (già discussi) con le rispettive 3 reazioni vincolari, rappresentanti la trasl. verticale ed orizzontale per l'APPOGGIO - CERNIERA e la sola trasl. verticale per il CARRELLIO - CERNIERA, ossia:



EQUILIBRIO DELLE FORZE:

dove abbiamo considerato il verso di H_A opposto a quello di B , come condizione necessaria affinché sia soddisfatta l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

lungo Z $\rightarrow + H_A - B = 0$

$H_A = B = 6 \Rightarrow H_A = 6 \text{ tonn}$

Poi, per quanto riguarda il verso delle due reazioni vincolari V_A e V_D è stato scelto arbitrariamente (conviene positivo) affinché si scriva l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

lungo Y $\rightarrow + \alpha + V_A + V_D = 0$

abbiamo un'equazione nelle due incognite V_A e V_D , non risolvibile;

C'e' bisogno di una seconda equazione da mettere a sistema con l' EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASL. VERTICALE ; a tal proposito, analizziamo :

EQUILIBRIO DEI MOMENTI

Scogliendo come polo A (arbitrario) e come CONVENZIONE DEL MOMENTO quella di rotazione antioraria, momento positivo, sussiste la seguente equazione di equilibrio alla rotazione :

$$\text{polo A} \rightarrow + B \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + \alpha \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - V_D \cdot (l) = 0$$

In quest' equazione l'unica incognita e' V_D , pertanto risulta essere risolvibile ; infatti isolando si ottiene :

$$V_D \cdot l = B \cdot \frac{l}{2} + \alpha \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \cdot (B + \alpha)$$

$$2 \cdot V_D \cdot l = l \cdot (B + \alpha) \rightarrow \boxed{V_D = \frac{(B + \alpha)}{2}}$$

da cui sostituendo i valori di B e α , si ottiene :

$$V_D = \frac{(B + \alpha)}{2} = \frac{(6 + 6)}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \boxed{V_D = 6 \text{ tonn}}$$

Il segno positivo del risultato ottenuto, conferma l'ipotesi iniziale di V_D verso il basso -

Ora che conosciamo l' incognita V_D , poniamola a sistema con l' EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASL. VERTICALE, ossia :

$$\text{lungo Y} \rightarrow \begin{cases} + \alpha + V_A + V_D = 0 \\ V_D = \frac{(B + \alpha)}{2} = 6 \text{ tonn} \end{cases}$$

sostituendo $\Rightarrow + \alpha + V_A + \frac{(B + \alpha)}{2} = 0$

Abbiamo un' equazione nell' incognita V_A , quindi risolvibile ;

Infatti, isolando \underline{V}_A si ottiene:

$$\underline{V}_A = -\alpha - \frac{(\beta + \alpha)}{2} = -\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\underline{V}_A = \left(-\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = -\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$$

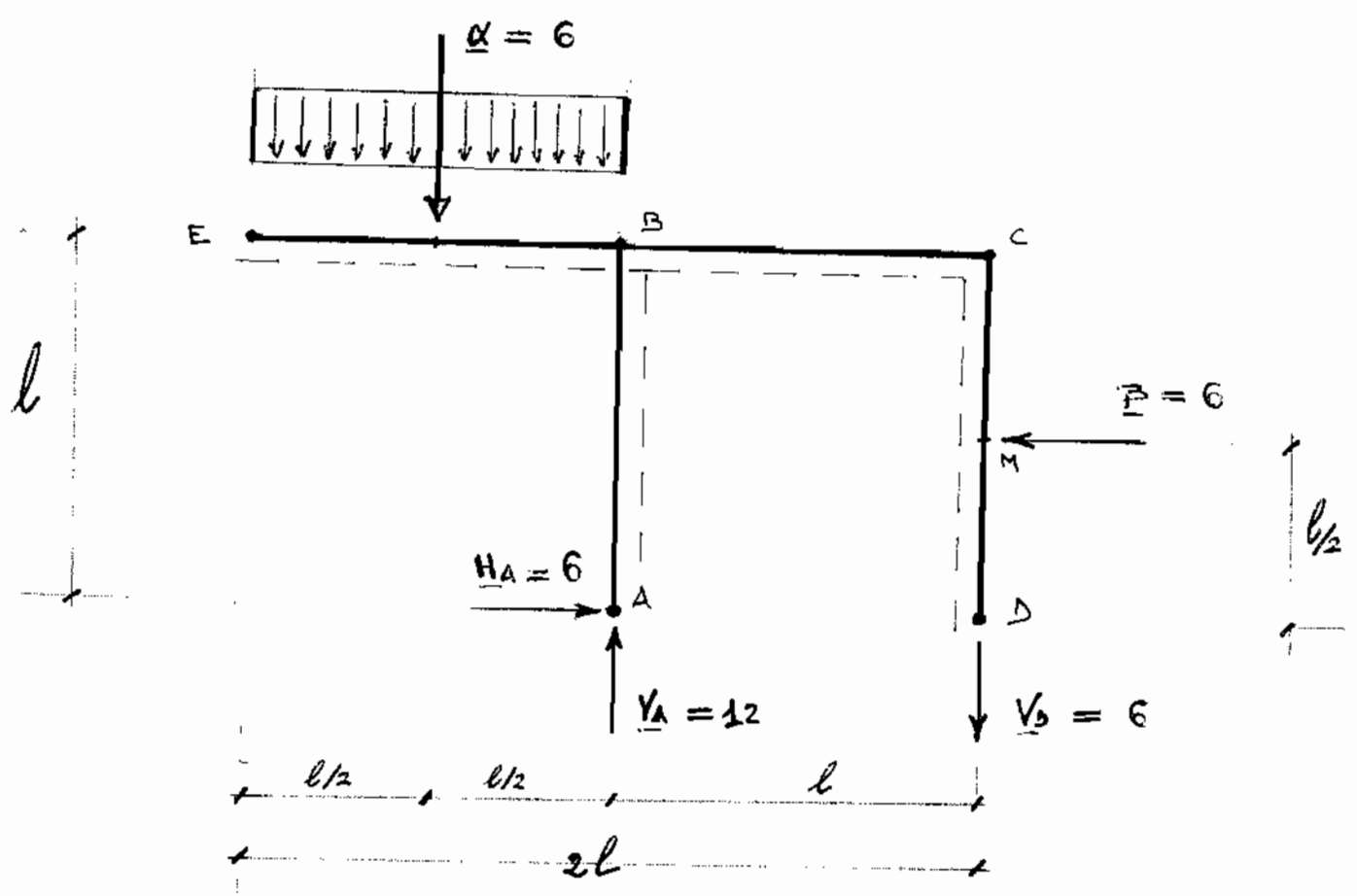
da cui, sostituendo i valori di α e β , si ottiene:

$$\underline{V}_A = -\frac{3}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 = -12 \Rightarrow \boxed{\underline{V}_A = -12}$$

Il segno negativo del risultato ottenuto, smentisce l'ipotesi iniziale di \underline{V}_A verso il basso; pertanto dev'esser preso verso l'alto.

SCHEMA STATICO FINALE

Sulla base delle considerazioni fatte sino ad ora sulle REAZIONI VINCOLARI, possiamo disegnare lo schema statico finale come:



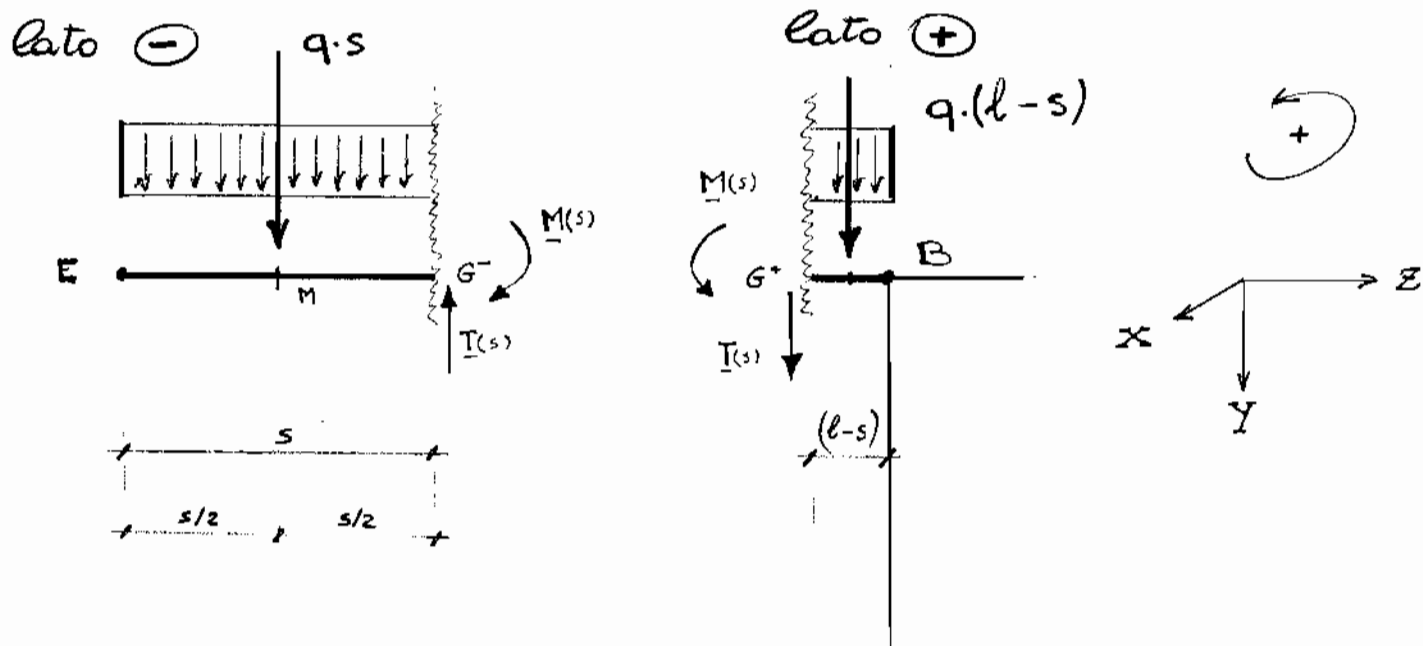
ANALISI INTERNA

6

L'Analisi Interna della struttura in questione, consiste nell'andare a sezionare in più punti la struttura per vedere l'andamento dello SFORZO NORMALE, di TAGLIO ed inoltre del MOMENTO FLETTENTE, partendo dallo SCHEMA STATICO FINALE -

TRATTO E-B

Consideriamo solo il tratto E-B dell'intera struttura, sul quale agisce il carico ripartito $q \cdot l = \alpha = 6 \text{ tonn.}$; immaginiamo ora di sezionare la trave in un punto G qualsiasi assumendo il tratto EG pari ad una lunghezza s ;



dove abbiamo considerato, conseguentemente all'aver sezionato il tratto E-B, il carico concentrato $q \cdot s$ nella sezione di materia M del tratto E-G lungo s ; notiamo che, questo schema risulta essere caratterizzato dal solo Carico Ripartito e da nessun'altra forza esterna -

NORMALE : 0 ≤ s ≤ l

Notiamo che , non essendoci nessuna forza esterna in direzione longitudinale al tratto E-B , lo SFORZO NORMALE risulta essere nullo (ossia, non compare nessuna reazione normale nella sezione di Taglio G) e pertanto :

N = 0

e l'andamento grafico ~~assome~~ sarebbe una retta orizzontale coincidente con la LINEA FONDAMENTALE (quella nera).

TAGLIO : 0 ≤ s ≤ l

Osservando il lato ⊖ , notiamo che affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DELLE FORZE , nella sezione di taglio G⁻ compare un TAGLIO T(s) che deve necessariamente essere diretto verso l'alto , per contrastare il carico q·s in mezzera M ;

pertanto , l'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE VERTICALE , rispettando il sistema di riferimento , sarà :

lungo Y → + q·s - T(s) = 0 → T(s) = + q·s

Il segno positivo del risultato ottenuto , conferma T(s) verso l'alto ; ora , facendo variare s tra 0 (estremo E) ed l (estremo B) , si ottiene :


T(s) = + q·s { s=0 → T(s) = 0
s=l → T(s) = + q·l = α = 6 tonn.

Ora notiamo che , il taglio T(s) verso l'alto (condizione necessaria per l'equilibrio alla trasl. verticale) produce una rotazione antioraria del carico in sezione G⁻ , che per la CONVENZIONE DEL TAGLIO , risulta essere negativo ; pertanto , graficamente assume l'andamento di una retta che varia negativamente dal valore minimo in E (ossia, nullo) al valore massimo in B (ossia -6 tonn) ;

MOMENTO FLETTENTE : $0 \leq s \leq l$

8

Osservando il lato \ominus , notiamo che affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DEI MOMENTI, nella sezione di taglio G^- compare un MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$ che deve necessariamente essere orario (quindi negativo per la convenzione dei momenti), per contrastare il momento antiorario dato dal carico $q \cdot s$ in materia M , che rispetto al polo G^- ha braccio $s/2$;

pertanto, Tenendo conto della CONVENZIONE DEI MOMENTI  e scegliendo arbitrariamente come polo G , allora l'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE nel lato \ominus sarà:

$$\text{polo } G \rightarrow -\underline{M}(s) + qs \cdot \left(\frac{s}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{+\underline{M}(s) = \frac{q \cdot s^2}{2}}$$

Ora, facendo variare s tra 0 (estremo E) ed l (estremo B), si ottiene:

$$\underline{M}(s) = \frac{qs^2}{2} \begin{cases} s=0 \rightarrow \underline{M}(s) = 0 \\ s=l \rightarrow \underline{M}(s) = +\frac{ql^2}{2} = (ql) \cdot \frac{l}{2} = \alpha \cdot \frac{l}{2} = 6 \cdot \frac{5}{2} = +15 \end{cases}$$

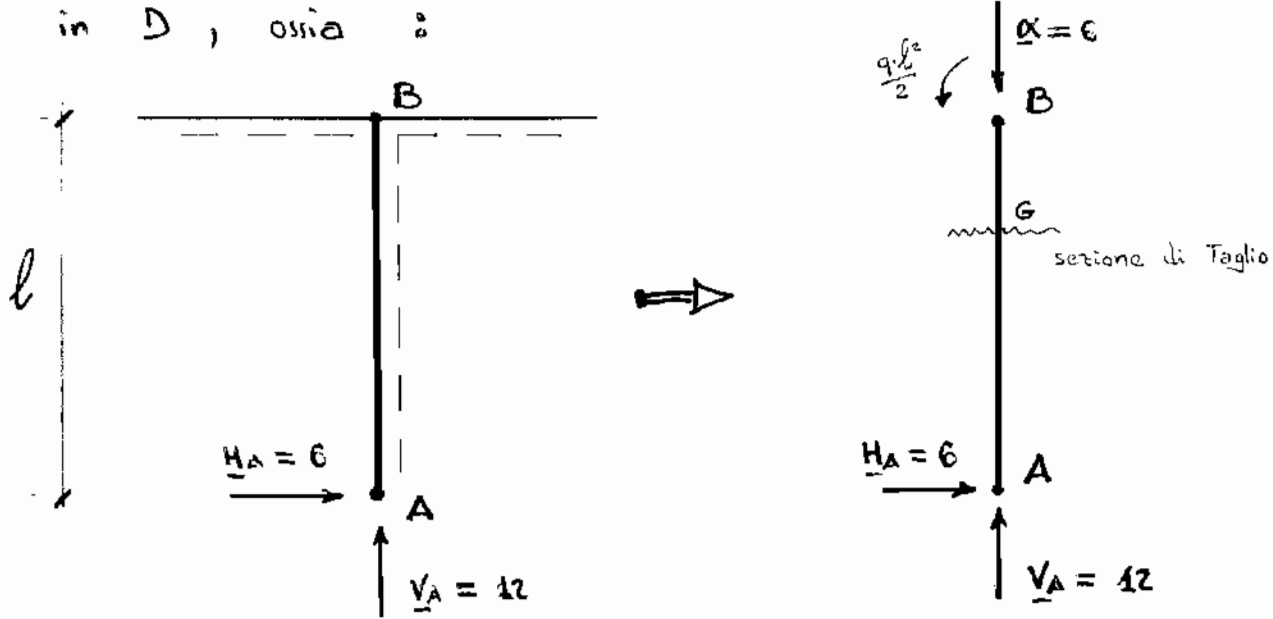
Il segno positivo del risultato ottenuto, conferma il senso di rotazione orario di $\underline{M}(s)$;

ora, questo momento flettente, tende le fibre superiori del materiale nella sezione di taglio G^- e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, risulta essere negativo;

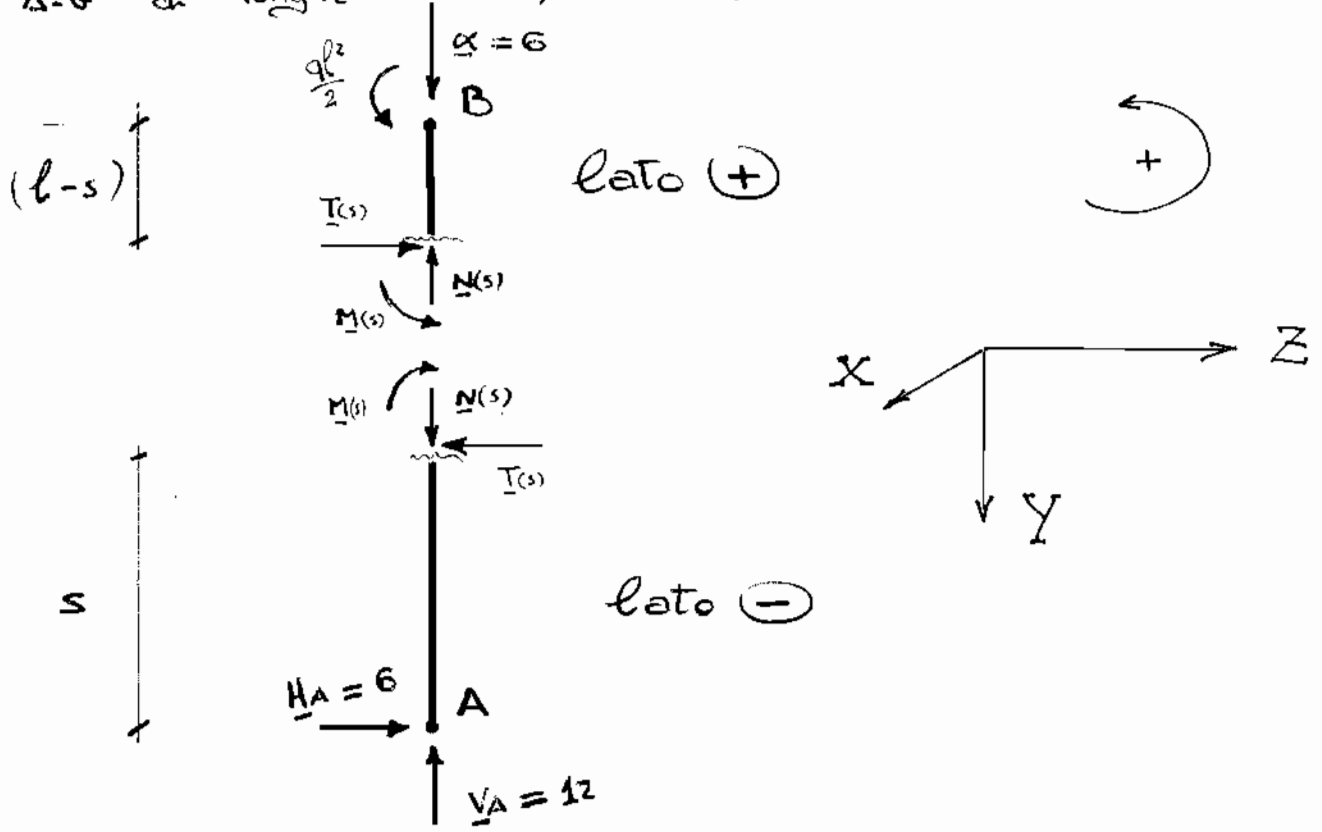
pertanto, graficamente il momento flettente $\underline{M}(s)$, assume l'andamento di una parabola che varia negativamente dal valore minimo in E (ossia, nullo), al valore massimo in B (ossia -15 tonxmetri);

TRATTO A-B

Come secondo ANALISI INTERNA della struttura, consideriamo solo (per modo di dire) il tratto A-B verticale, che ha come base l'APPOGGIO-CERNIERA in A; questo tratto è caratterizzato dalla presenza del nodo B sul quale si ripercuotono, il carico $\alpha = 6 \text{ tonm}$ ed il momento flettente del tratto EB ($ql^2/2$), ed inoltre dalle reazioni vincolari in D, ossia:



Immaginiamo ora di sezionare la trave in un punto G qualsiasi tra A e B, in particolare partendo da A verso B (risulta più semplice in quanto in A ci sono meno problemi), assumiamo il tratto A-G di lunghezza s, ossia:



NORMALE : $0 \leq s \leq l$

(10)

Osservando il lato \ominus , notiamo che, essendoci in A la reazione vincolare \underline{V}_A agente in direzione longitudinale alla trave (lungo Y , discorde), affinché sia soddisfatto l'equilibrio delle forze, compare uno sforzo normale $\underline{N}(s)$ che deve necessariamente essere diretto longitudinalmente lungo Y (concorde) per bilanciare \underline{V}_A ; pertanto, rispettando il sistema di riferimento scelto, l'equazione di equilibrio alla trasl. verticale, sarà:

$$\text{lungo } Y \rightarrow + \underline{N}(s) - \underline{V}_A = 0$$

$$\underline{N}(s) = \underline{V}_A = 12 \text{ Tonn}$$

Il segno positivo del risultato, conferma $\underline{N}(s)$ concorde con Y nel lato \ominus del tratto A-B;

ma ora, per la convenzione della normale, essendo questo sforzo normale di compressione, risulta essere negativo -

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente negativa (si disegna dal lato della linea di riferimento) di valore $\underline{N}(s) = -6 \text{ Tonn}$, per s che varia tra 0 (in A) ed l (in B).

TAGLIO : $0 \leq s \leq l$

Osservando sempre il lato \ominus , notiamo che, essendoci in A la reazione vincolare $\underline{H}_A = 6 \text{ ton}$ agente in direzione ortogonale (lungo Z , concorde), affinché sia soddisfatto l'equilibrio delle forze, compare uno sforzo di taglio $\underline{T}(s)$ che deve necessariamente essere diretto ortogonalmente lungo Z (discorde) per bilanciare \underline{H}_A ;

pertanto, rispettando il sistema di riferimento scelto, l'equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale, sarà:

$$\text{lungo } Z \rightarrow + \underline{H}_A - \underline{T}(s) = 0$$

$$\underline{T}(s) = \underline{H}_A = 6 \text{ ton}$$

Il segno positivo del risultato, conferma $\underline{T}(s)$ concorde con l'asse Z nel lato \ominus del tratto A-B;

ma ora, per la convenzione del taglio, questo sforzo di taglio $\underline{T}(s)$ produce una rotazione antioraria del concio in sezione G e pertanto risulta essere negativo -

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente negativa (si disegna dal lato della linea di riferimento) di valore $\underline{T}(s) = -6 \text{ ton}$, per s che varia tra 0 (in A) ed l (nodo B).

$$\text{MOMENTO FLETTENTE} = 0 \leq s \leq l$$

11

Osservando per l'ultima volta il lato \ominus , notiamo che, essendoci forze dirette ortogonalmente alla trave che producono momento alla rotazione, affinché sia soddisfatto l'Equilibrio dei momenti, nella sezione di taglio G^- compare un MOMENTO FLETTENTE $M(s)$ che deve necessariamente essere orario (quindi negativo per la CONVENZIONE DEI MOMENTI ALLA ROTAZIONE), per bilanciare il momento antiorario dato dalla reazione vincolare H_A in A, il quale rispetto al polo G^- ha braccio s ;

pertanto, rispettando la CONVENZIONE DEI MOMENTI ALLA ROTAZIONE \oplus ed il polo G^- , l'equazione di equilibrio alla rotazione, sarà:

$$\text{polo } G^- \rightarrow -M(s) + H_A \cdot s = 0 \rightarrow \boxed{M(s) = H_A \cdot s}$$

Ora facendo variare s tra 0 (in A) ed l (nodo B), si ottiene:

$$M(s) = H_A \cdot s \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \\ s=l \rightarrow M(s) = H_A \cdot l = 30 \text{ ton} \times \text{metro} ; \end{cases}$$

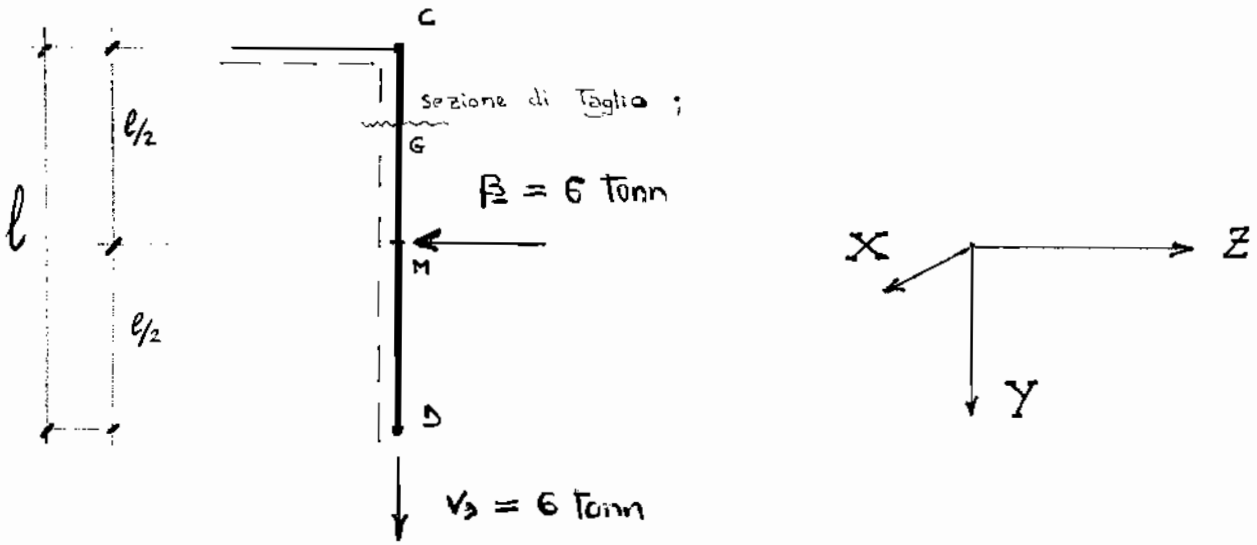
Il segno positivo dei risultati ottenuti, conferma il senso orario di rotazione del MOMENTO FLETTENTE $M(s)$ nella sezione di taglio G^- ;

ma ora, questo momento flettente, tende le fibre del materiale dalla parte superiore della LINEA DI RIFERIMENTO e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, risulta essere negativo -

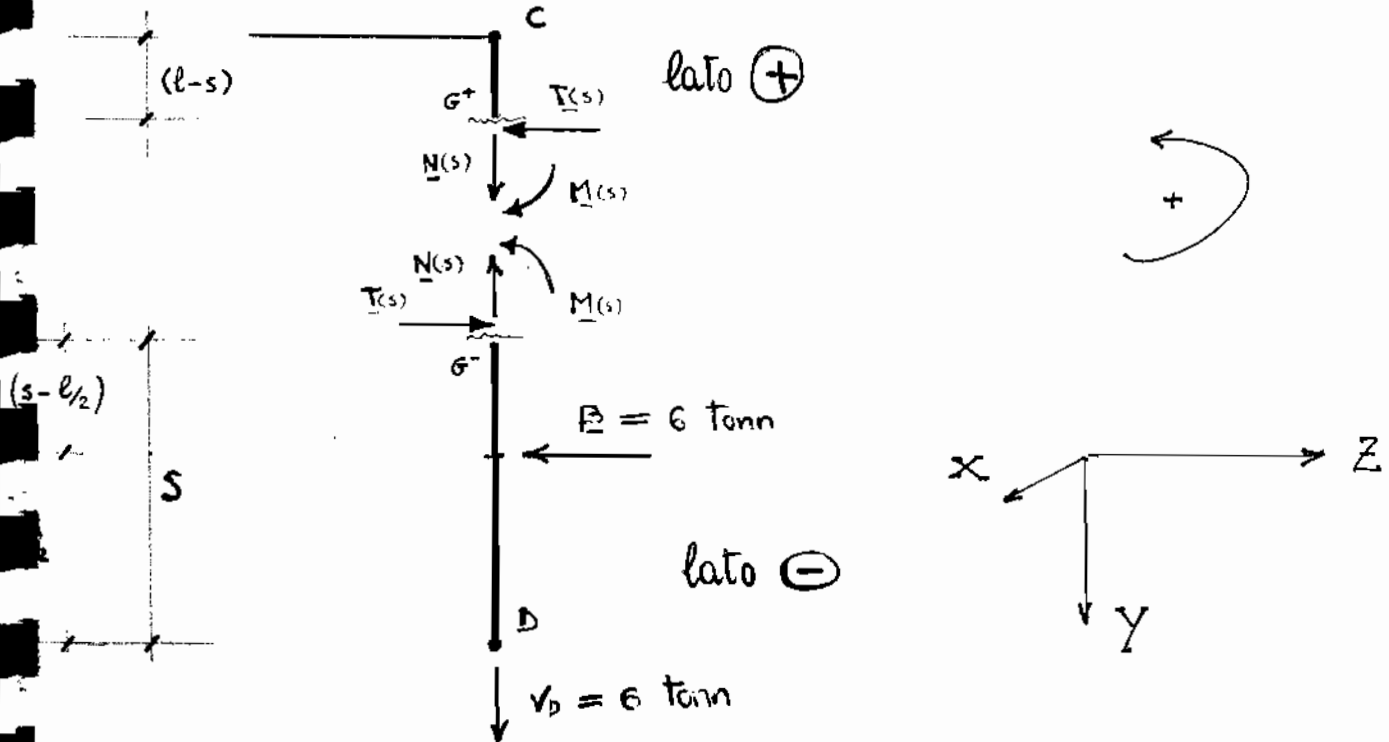
Graficamente, il momento flettente $M(s)$, assume l'andamento di una retta che varia negativamente dal valore minimo in A (ossia nullo), al valore massimo nel nodo B ($-30 \text{ ton} \times \text{metro}$), per s che varia tra 0 ed l -

TRATTO C-D

Ora, consideriamo solo il tratto C-D verticale dell'intera struttura, che ha come base il CARRELLO - CERNIERA in D, sul quale agisce in direzione perpendicolare (lungo Z) il CARICO CONCENTRATO $P = 6$ tonn. nella sezione di Mezzeria M (discorde con Z) e la Reazione Vincolare $V_D = 6$ tonn in D nella direzione longitudinale alla trave (concorde con Y):



Immaginiamo ora di sezionare la trave in un punto G qualsiasi tra C ed M, assumendo il tratto D-G di lunghezza s , ossia:



NORMALE : $0 \leq s \leq l$

Osservando il lato \ominus , notiamo che, essendoci in D la Reazione Vincolare V_D agente nella direzione longitudinale alla trave (lungo Y), affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, compare uno sforzo NORMALE $N(s)$ che deve necessariamente essere diretto longitudinalmente verso l'alto (discorde con Y) per bilanciare V_D ; pertanto, rispettando il SISTEMA DI RIFERIMENTO scelto, l'equazione di equilibrio alla Trasl. verticale, sarà:

$$\text{lungo } Y \rightarrow + V_D - N(s) = 0$$

$$\text{da cui} \rightarrow \boxed{N(s) = + V_D = + 6 \text{ Tonn}}$$

Il segno positivo del risultato, conferma $N(s)$ verso l'alto; ma ora, per la CONVENZIONE DELLA NORMALE, essendo questo sforzo Normale di TRAZIONE, risulta essere positivo -

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente positiva (si disegna dal lato superiore della linea di riferimento) di valore $N(s) = + 6 \text{ Tonn}$ -

TAGLIO : $l/2 \leq s \leq l$

Osservando il lato \ominus , notiamo che, essendoci nella mezzana M il CARICO CONCENTRATO $B = 6 \text{ Tonn}$ agente in direzione ortogonale (lungo Z , discorde), affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, compare uno sforzo di TAGLIO $T(s)$ che deve necessariamente essere diretto ortogonalmente lungo Z (concorde) per bilanciare B ; pertanto, rispettando il SISTEMA DI RIFERIMENTO scelto, l'equazione di equilibrio alla Trasl. orizzontale, sarà:

$$\text{lungo } Z \rightarrow + T(s) - B = 0 \rightarrow \boxed{T(s) = + B = + 6 \text{ Tonn}}$$

Il segno positivo del risultato, conferma $T(s)$ concorde con l'asse Z ; ma ora, per la CONVENZIONE DEL TAGLIO, questo sforzo di Taglio $T(s)$ produce una rotazione oraria del concio in sezione G e pertanto risulta essere positivo -

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente positiva di valore $T(s) = + 6 \text{ Tonn}$, per s che varia tra $l/2$ ed l ; non ha senso far variare s tra 0 (in D) ed $l/2$ (in M) in quanto non essendoci forze ortogonali alla trave che producono Taglio (partendo da D sino ad M), risulta nullo -

Osservando sempre il lato \ominus , notiamo che, essendoci forze dirette ortogonalmente alla trave che producono momento, affinché sia soddisfatto l'equilibrio dei momenti, nella sezione di taglio G^- compare un momento flettente $\underline{M}(s)$ che deve necessariamente essere antiorario (quindi positivo per la convenzione dei momenti alla notazione), per bilanciare il momento orario dato dal carico concentrato $\underline{P} = 6$ tonn in mezzera M , il quale rispetto al polo G ha braccio $(s - l/2)$;

pertanto, rispettando la convenzione dei momenti \curvearrowright ed il polo G^- , l'equazione di equilibrio alla notazione, sarà:

$$\text{Polo } G^- \rightarrow + \underline{M}(s) - \underline{P} \cdot \left(s - \frac{l}{2} \right) = 0$$

$$\text{da cui} \rightarrow \boxed{\underline{M}(s) = + \underline{P} \cdot \left(s - \frac{l}{2} \right)}$$

Ora facendo variare s tra $l/2$ ed l (quindi dalla mezzera al nodo C), si ottiene:

$$\underline{M}(s) = + \underline{P} \cdot \left(s - \frac{l}{2} \right) \begin{cases} s = l/2 \rightarrow \underline{M}(s) = 0 \\ s = l \rightarrow \underline{M}(s) = + \underline{P} \cdot \left(l - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} \underline{P} \cdot l = 15 \text{ tonn} \end{cases}$$

Il segno positivo del risultato ottenuto, conferma il senso antiorario di rotazione di $\underline{M}(s)$ in G^- ;

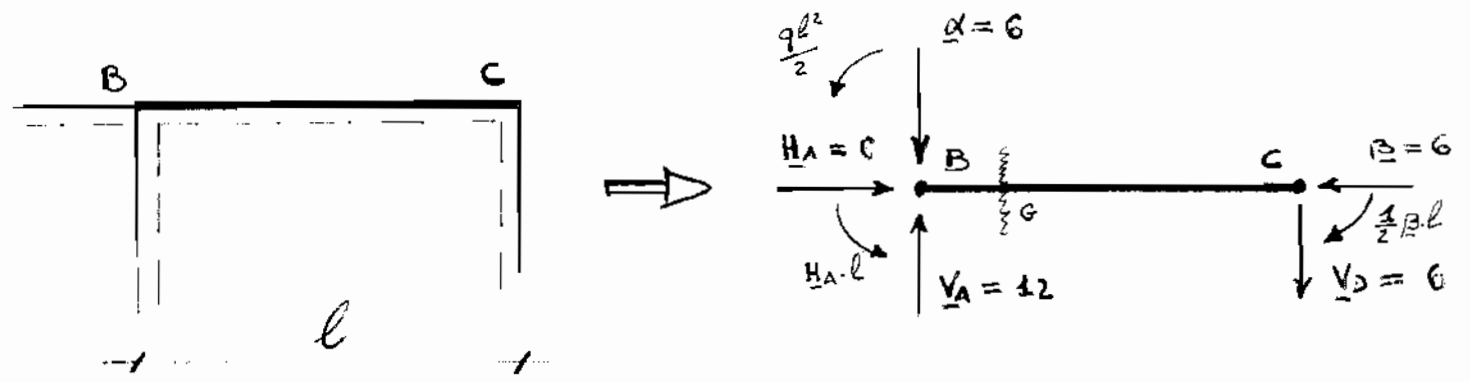
ma ora, questo momento flettente, tende le fibre del materiale dalla parte superiore della LINEA DI RIFERIMENTO e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE, risulta essere negativo.

Graficamente, il momento flettente $\underline{M}(s)$, assume l'andamento di una retta che varia negativamente dal valore minimo in mezzera (ossia nullo), al valore massimo nel nodo C (ossia -15 tonn x metro).

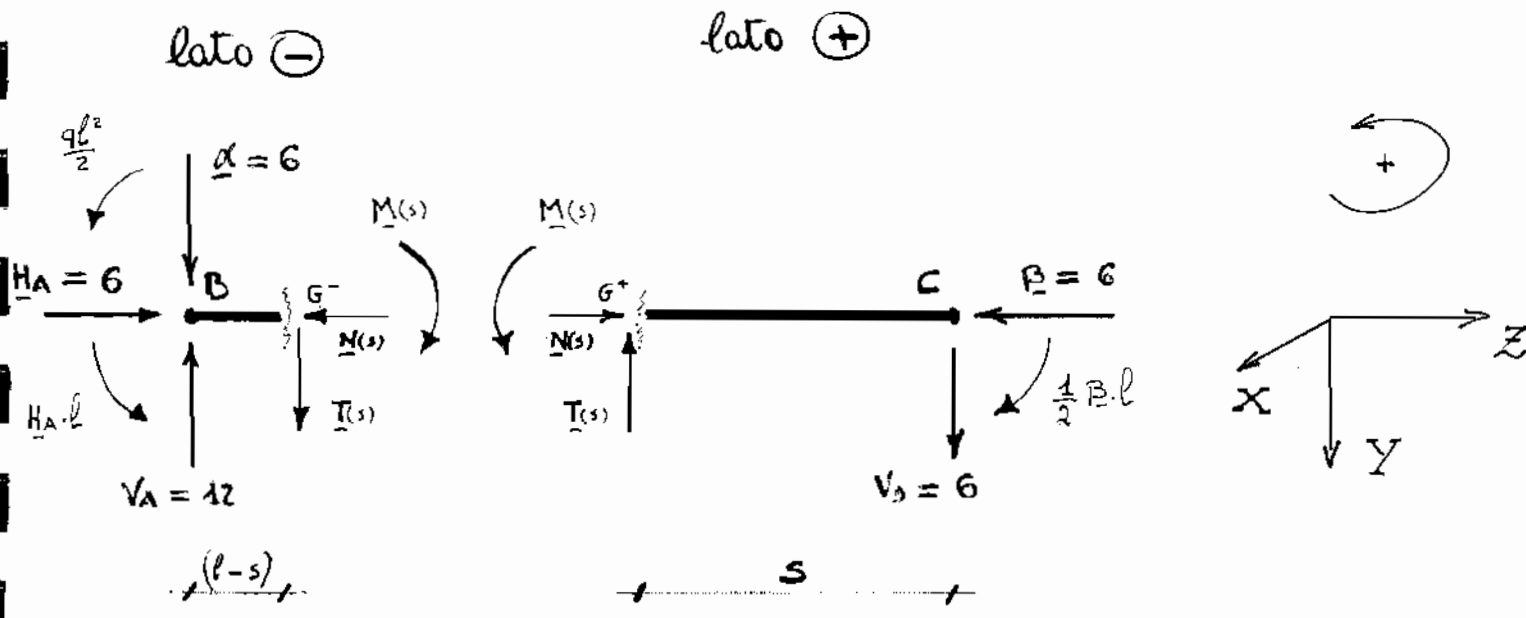
Ricordiamo che $l/2 \leq s \leq l$ in quanto, a partire da D sino alla mezzera non ci sono forze in direzione ortogonale alla trave che producono momento, quindi da D ad M è nullo il momento flettente $\underline{M}(s)$.

TRATTO B-C

Come ultima analisi Interna che come vedremo risulta essere quella più impegnativa, consideriamo solo (per modo di dire) il tratto B-C orizzontale, caratterizzato da due nodi, l'estremo B e l'estremo C, sui quali si riperquotono tutte le forze esterne ed interne alla struttura e tutti i momenti, analizzati sino ad ora per gli altri tratti; quindi all'apparenza, su questo tratto B-C non agisce nessun carico (nessuna forza esterna), ma la realtà è ben più complessa, come mostrato in figura:



Immaginiamo ora di sezionare la Trave in un punto G qualsiasi tra B e C, in particolare partendo da C verso B (risultato più semplice in quanto in C ci sono meno forze e momenti), assumiamo il tratto C-G di lunghezza s, ossia:



NORMALE : $0 \leq s \leq l$

[TRATTO B-C] 2°

16

Osservando il lato \oplus , notiamo che, essendoci nel nodo C la presenza del carico concentrato $\underline{P} = 6 \text{ tonn.}$ agente nella direzione longitudinale alla trave (lungo Z, discorde), affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, compare uno SFORZO NORMALE $\underline{N}(s)$ che deve necessariamente essere diretto longitudinalmente lungo Z (concorde) per bilanciare \underline{P} ;

pertanto, rispettando il SISTEMA DI RIFERIMENTO scelto, l'equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale, sarà:

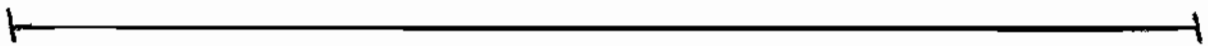
$$\text{lungo } Z \rightarrow + \underline{N}(s) - \underline{P} = 0$$

$$\underline{N}(s) = \underline{P} = 6 \text{ tonn}$$

Il segno positivo del risultato conferma $\underline{N}(s)$ concorde con l'asse Z nel lato \oplus preso in analisi;

ma ora, per la CONVENZIONE DELLA NORMALE, essendo questo sforzo Normale $\underline{N}(s)$ di COMPRESSIONE, risulta essere negativo.

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente negativa (si disegna dal lato della linea di riferimento) di valore $\underline{N}(s) = -6 \text{ tonn.}$ per s che varia tra 0 (in C) ed l (in B).



TAGLIO : $0 \leq s \leq l$

Osservando sempre il lato \oplus , notiamo che, essendoci nel nodo C la presenza della REAZIONE VINCOLARE $\underline{V}_0 = 6 \text{ tonn.}$ agente in direzione ortogonale (lungo Y, concorde), affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, compare uno SFORZO di TAGLIO $\underline{T}(s)$ che deve necessariamente essere diretto ortogonalmente lungo Y (discorde) per bilanciare \underline{V}_0 ;

pertanto, rispettando il SISTEMA DI RIFERIMENTO scelto, l'equazione di equilibrio alla trasl. verticale sarà:

$$\text{lungo } Y \rightarrow - \underline{T}(s) + \underline{V}_0 = 0 \rightarrow \underline{T}(s) = \underline{V}_0 = 6 \text{ tonn.}$$

Il segno positivo del risultato, conferma $\underline{T}(s)$ concorde con l'asse Y nel lato \oplus ; ma ora, per la CONVENZIONE DEL TAGLIO, questo sforzo di Taglio $\underline{T}(s)$ produce una rotazione oraria del concio in sezione G e pertanto risulta essere positivo.

Graficamente, quanto detto, assume l'andamento di una retta costantemente positiva di valore $\underline{T}(s) = +6 \text{ tonn.}$, per s che varia tra 0 (in C) ed l (in B).

MOMENTO FLETTENTE : $0 \leq s \leq l$

TRATTO B-C | 3°

17

Osservando per l'ultima volta il lato \oplus del tratto B-C, notiamo che, essendoci forze applicate in direzione ortogonale alla Trave che producono Momento alla rotazione ed inoltre essendoci la presenza del MOMENTO FLETTENTE $\frac{1}{2} \beta \cdot l$ (orario) nel nodo C (è dovuto al fatto che si ripercuote dal tratto C-D), allora affinché sia soddisfatto l'EQUILIBRIO DEI MOMENTI, nella sezione di Taglio G^- compare un MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$ che ipotizziamo essere antiorario (quindi positivo);

pertanto, rispettando la $\Sigma M = 0$ ed il polo G^- , l'equazione di equilibrio alla rotazione, sarà:

$$\text{polo } G^- \rightarrow + M(s) - \frac{1}{2} \beta \cdot l - \underline{V}_0 \cdot s = 0$$

$$\underline{M}(s) = \frac{1}{2} \beta \cdot l + \underline{V}_0 \cdot s$$

Ora, facendo variare s tra 0 ed l (quindi dal nodo C al nodo B), si ottiene:

$$\underline{M}(s) = \frac{1}{2} \beta \cdot l + \underline{V}_0 \cdot s \quad \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = \frac{1}{2} \beta \cdot l = 15 \text{ Tonn.} \\ s=l \rightarrow M(s) = \frac{1}{2} \beta \cdot l + \underline{V}_0 \cdot l = 45 \text{ Tonn.} \end{cases}$$

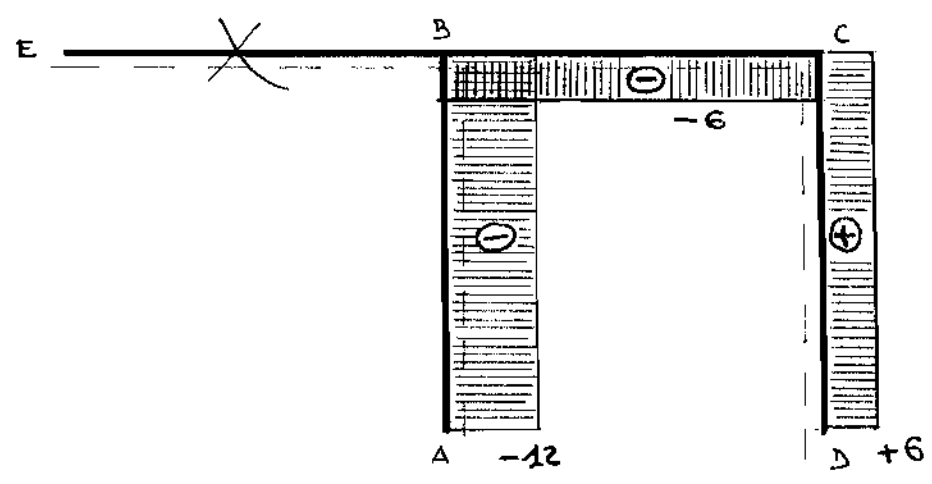
Il segno positivo dei risultati ottenuti, conferma il senso antiorario di rotazione del MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$ in G^- , inizialmente scelto come ipotesi;

ma ora, questo momento flettente $\underline{M}(s)$, tende le fibre del materiale dalla parte superiore della LINEA DI RIFERIMENTO e per la CONVENZIONE DELLE FIBRE TESE O COMPRESSE, risulta essere negativo -

Graficamente, il MOMENTO FLETTENTE $\underline{M}(s)$, assume l'andamento di una retta che varia negativamente dal valore minimo nel nodo C (ossia, $-15 \text{ ton} \times \text{metro}$), al valore massimo nel nodo B (ossia, $-45 \text{ ton} \times \text{metro}$) -

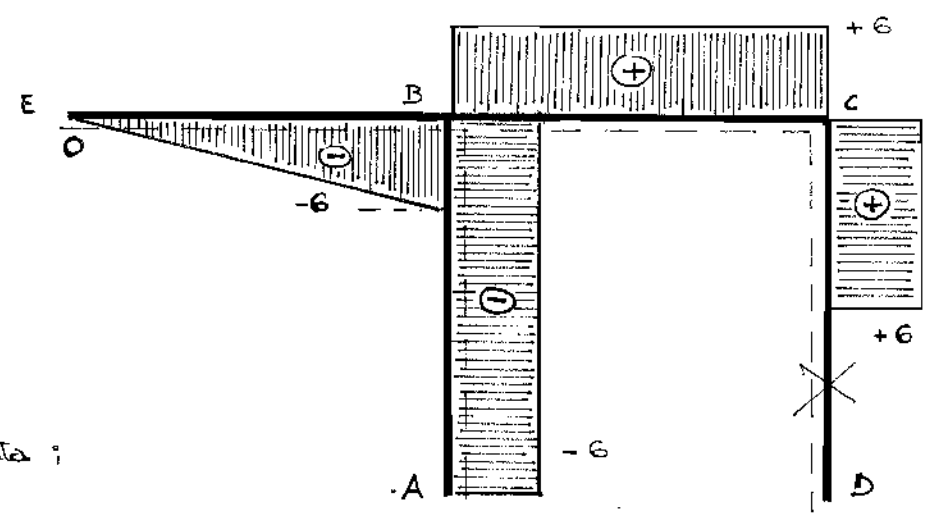
DIAGRAMMI

(N) normale

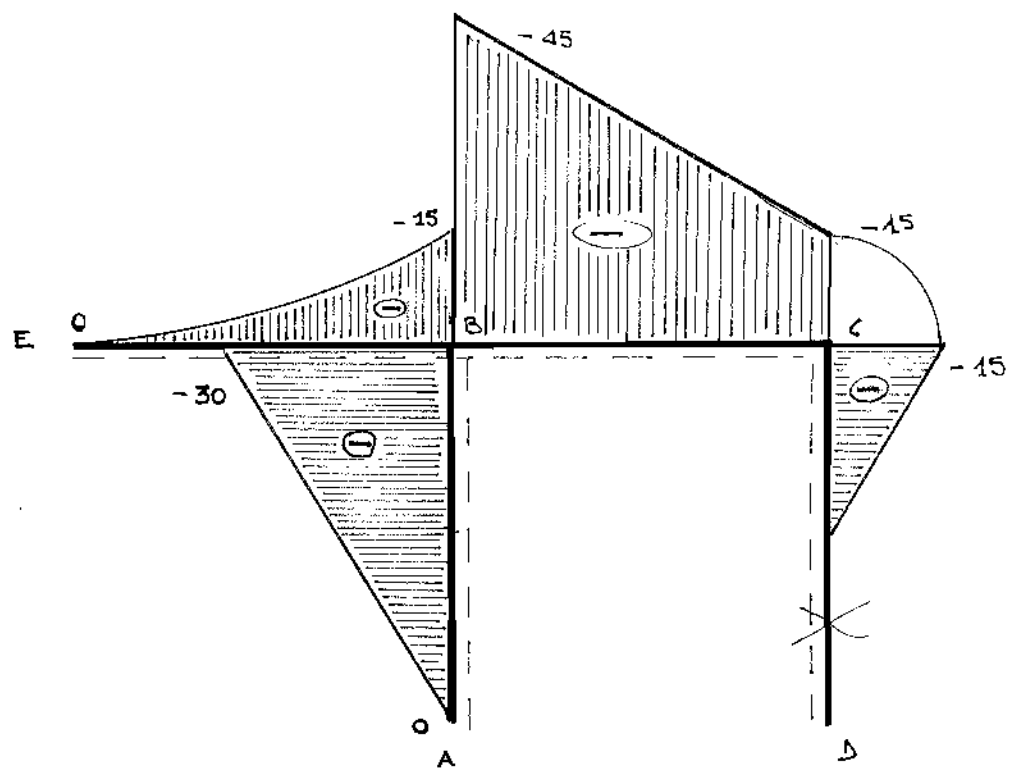


(T) taglio

in scala raddoppiata

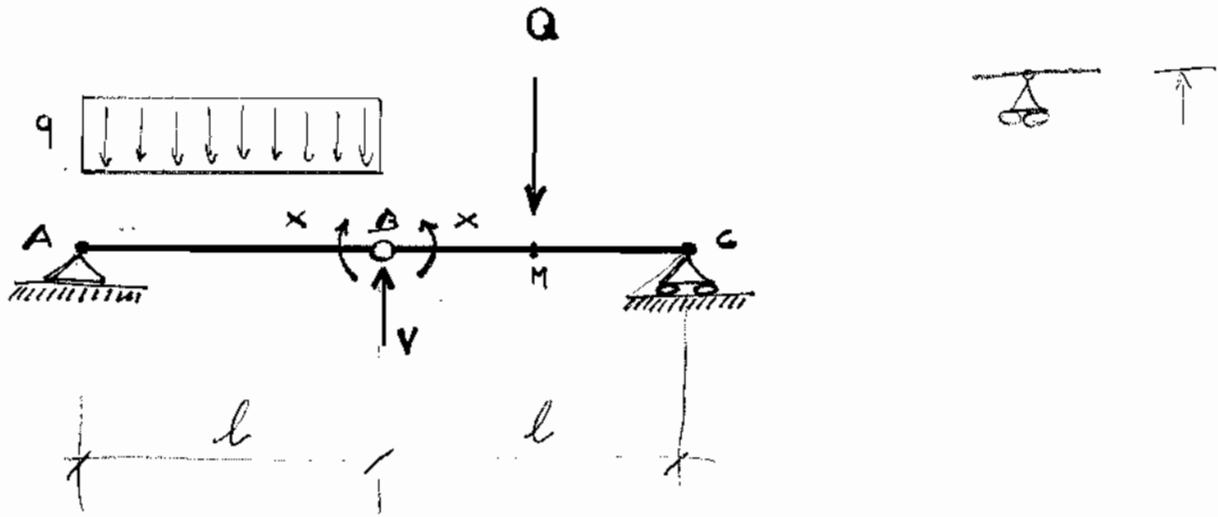


(M) momento flettente



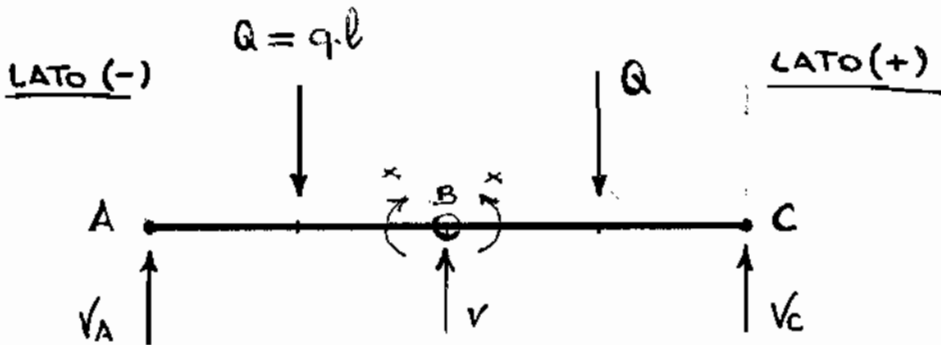
SISTEMA ISOSTATICO ASSOCIATO

1

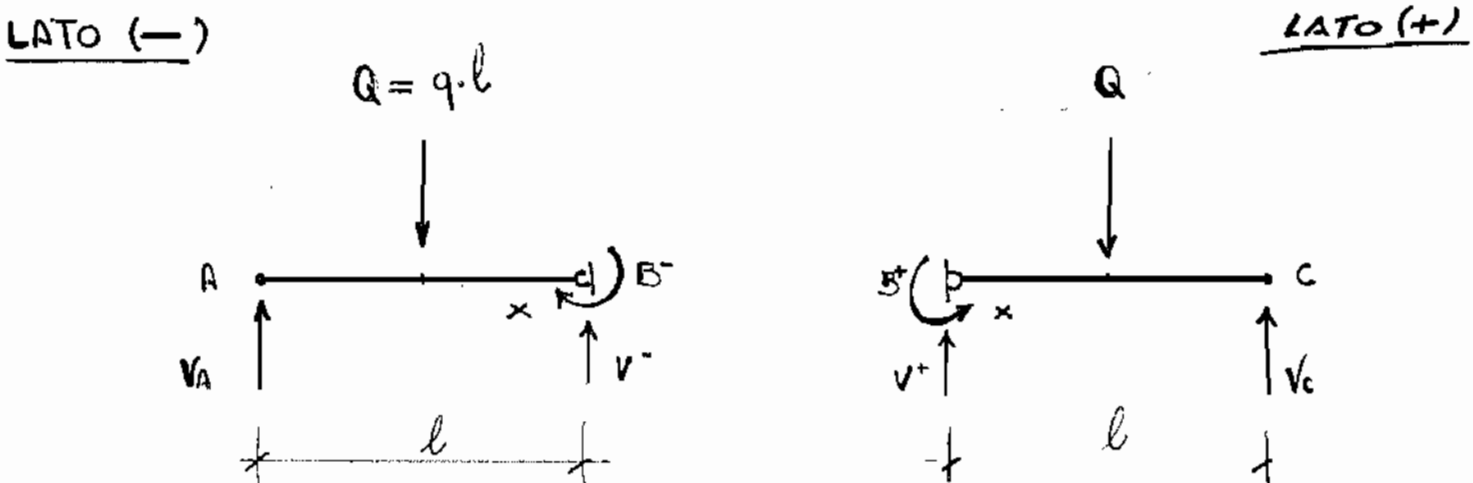


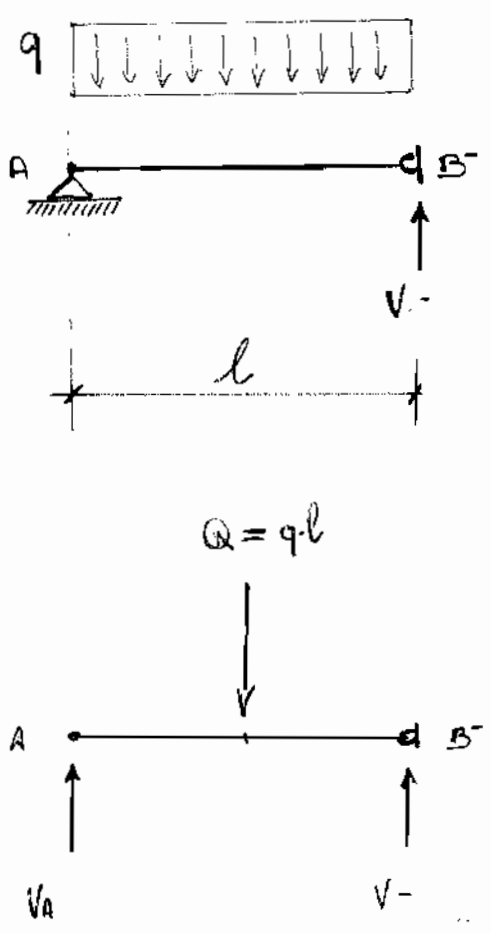
Al CARRELLO - INTERNO abbiamo sostituito una CERNIERA - INTERNA

$$\text{Imponiamo } \begin{cases} \delta_{BA}(q, x) = 0 \\ \delta_{BC}(Q, x) = 0 \end{cases}$$

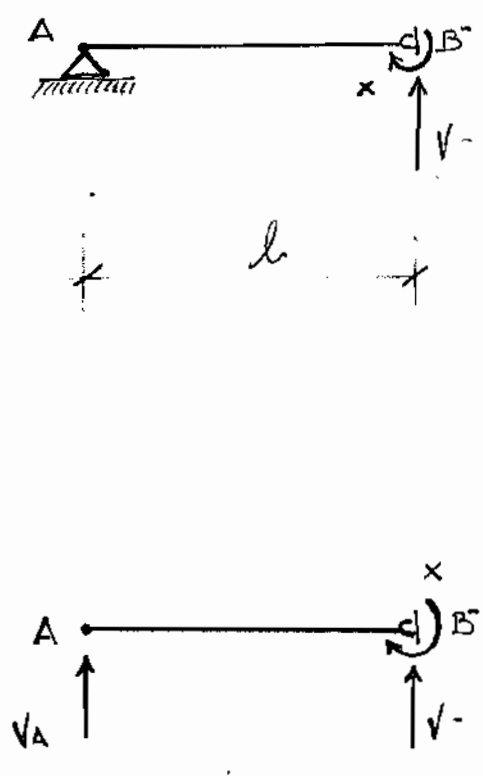


Per l'ANALISI ESTERNA (determinazione della Schema Statico), immaginiamo di studiare l'intera struttura, separando i due lati:





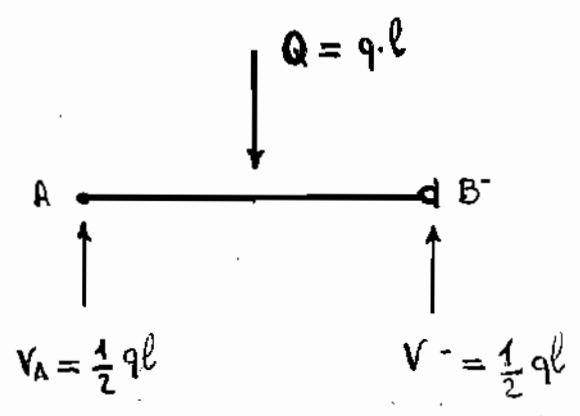
+



Essendo lo schema simmetrico, per l'equilibrio alle traslazioni verticali, si ha:
LUNGO $Y \rightarrow +Q - V_A - V^- = 0$

$$V^- = V_A = + \frac{1}{2} ql$$

Il verso è corretto, puntiamo in alto



Di questo schema statico cominciamo già l'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE e suoi risultati -

Equazione di equilibrio alla rotazione:

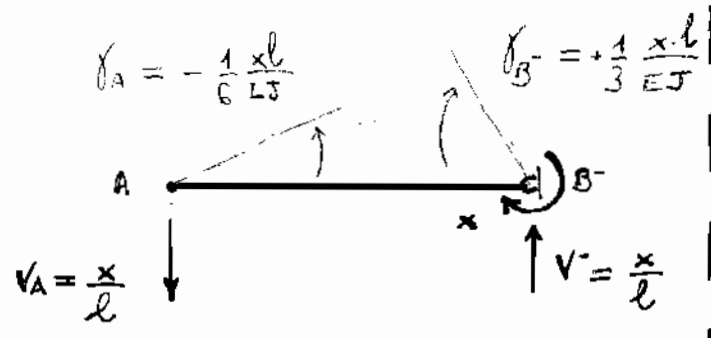
POLO: B \rightarrow $-x - V_A \cdot l = 0$

$$V_A = - \frac{x}{l} \text{ anche in basso.}$$

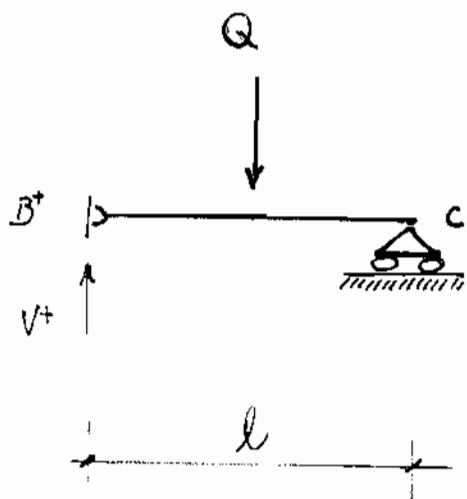
Equazione di equilibrio alla Trasl. verticale:

LUNGO $Y \rightarrow -V_A - V^- = 0$

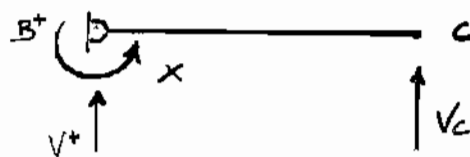
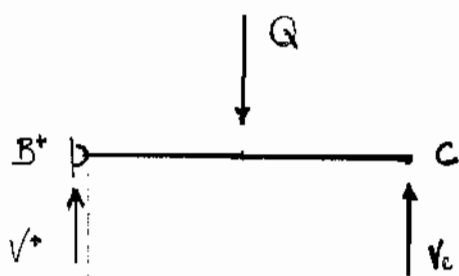
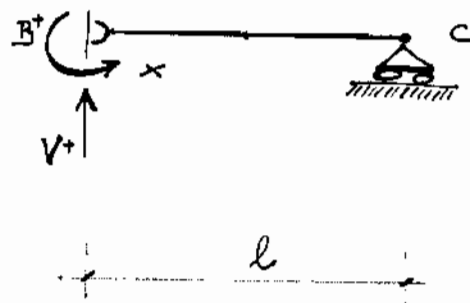
$$V^- = + \frac{x}{l} \text{ anche in alto.}$$



Di questo schema statico cominciamo già l'ANALISI DELLA DEFORMAZIONE ed i suoi risultati -



+



Essendo lo schema simmetrico, per l'equilibrio alle trasl. verticale, si ha:

$$V^+ = V_c = \frac{1}{2} Q$$

Il verso è corretto, puntiamo in alto.

Per l'equazione di equilibrio alla rotazione, si ha:

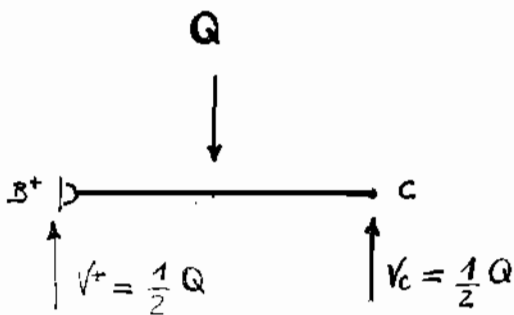
Polo B⁺ → $+x + V_c \cdot l = 0$

$$V_c = -\frac{x}{l} \text{ anche in basso}$$

Per l'equazione di equilibrio alla trasl. verticale, si ha:

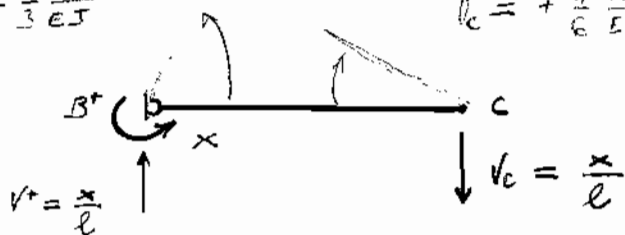
LUNGO Y → $-V^+ - V_c = 0$

$$V^+ = +\frac{x}{l} \text{ anche in alto}$$



$$\delta_{B^+} = \frac{1}{3} \frac{x l}{EJ}$$

$$V_c = +\frac{1}{6} \frac{x l}{EJ}$$



Equazione di equilibrio alla trasl. verticale :

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow -V_A - V^- = 0$$

Equazione di equilibrio alle rotazioni :

$$\text{POLO } B^- \rightarrow -x - V_A \cdot l = 0$$

$$V_A \cdot l = -x$$

$$\boxed{V_A = -\frac{x}{l}} \text{ anche verso il basso.}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio alla trasl. verticale, si ottiene :

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow -V_A - V^- = 0$$

$$V^- = -V_A = -\left(-\frac{x}{l}\right) = +\frac{x}{l}$$

$$\boxed{V^- = +\frac{x}{l}} \text{ anche verso l'alto.}$$

Equazione di equilibrio alle rotazioni :

$$\text{POLO } B^+ \rightarrow +x + V_C \cdot l = 0$$

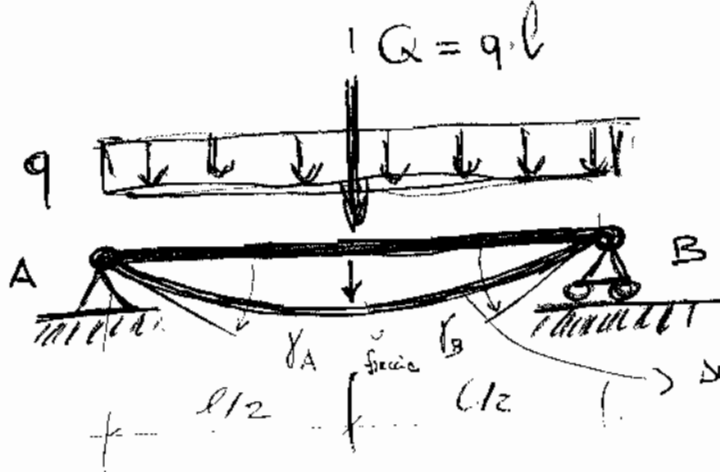
$$V_C \cdot l = -x$$

$$\boxed{V_C = -\frac{x}{l}} \text{ anche in basso ;}$$

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow -V^+ - V_C = 0$$

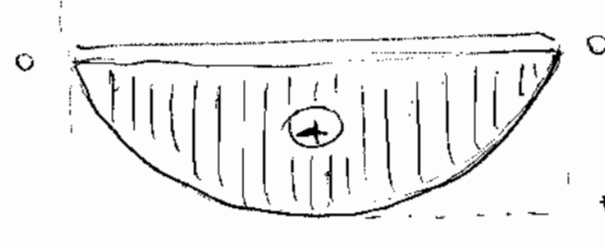
$$V^+ = -V_C = -\left(-\frac{x}{l}\right) = +\frac{x}{l}$$

$$\boxed{V^+ = \frac{x}{l}} \text{ anche in alto ;}$$



SCHEMA SIMMETRICO

Il grafico del Momento Flettente è anche il diagramma della CURVATURA K che rappresenta la DEFORMATA della trave reale, ed è dato da:



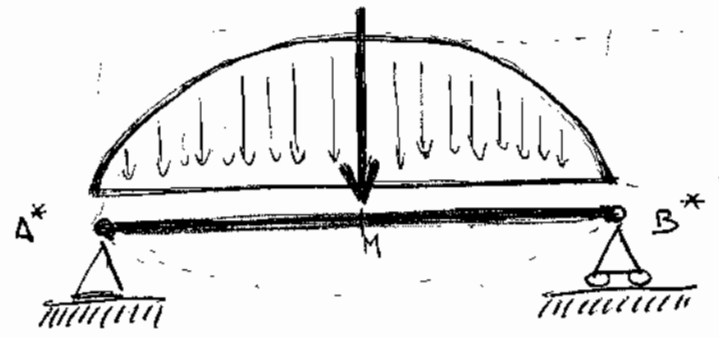
$$K = \frac{M_{max}}{E \cdot J}$$

$E \rightarrow$ Modulo di Young
 $J \rightarrow$ Momento d'Inerzia

$$K = \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \frac{q l^2}{8 E J}$$

Principio di MOHR (Trave Ausiliaria)

$$A_{mm} = Q^* = \frac{1}{12} q l^3$$



$$h = \frac{1}{8} q l^2 = q^*$$

$$V_{A^*} = \frac{1}{24} q l^3$$

$$V_{B^*} = \frac{1}{24} q l^3$$

Area del Momento Flettente (A_m)

(2)

trattasi dell'area di un settore circolare inscritto in un rettangolo:

$$A_{\text{rett.}} = b \cdot h \quad \text{dove } b = \text{base} \\ h = \text{altezza}$$

da cui l'area del settore circolare sarà data da:

$$A_{\text{rett. circ.}} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h$$

Nel nostro caso l'Area del Settore Circolare è proprio l'area del momento flettente ausiliario:

$$A_m = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h = \frac{2}{3} \cdot (l) \cdot (q^*) = \frac{2}{3} l \cdot \left(\frac{1}{8} ql^2\right) = \frac{1}{12} ql^3$$

$$A_m = \frac{1}{12} ql^3 = Q^* \quad \begin{array}{l} \text{CARICO CONCENTRATO} \\ \text{AUSILIARIO} \end{array}$$

che risulta essere pari al carico ripartito ausiliario q^* , concentrato in mezz'aria.

Ora essendo lo schema simmetrico e conoscendo il ~~carico~~ CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO Q^* , possiamo determinare le REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE V_A^* e V_B^*

$$V_A^* = V_B^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{A_m}{2} = \frac{\frac{1}{12} ql^3}{2} = \frac{1}{24} ql^3$$

$$V_A^* = V_B^* = \frac{1}{24} ql^3$$

ROTAZIONI γ_A e γ_B :

(3)

Conoscendo le REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE V_A^* e V_B^* e tenendo conto della deformazione elastica ($\frac{1}{E \cdot J}$) possiamo determinare le rotazioni in A e in B della trave reale dovute al CARICO RIPARTITO q :

in generale

$$\gamma = \frac{V^*}{E \cdot J}$$

$V^* \rightarrow$ Reazione Vincolare Ausiliaria

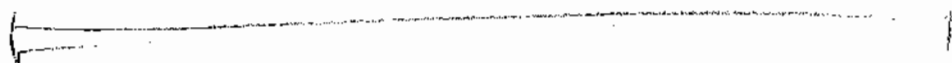
$E \rightarrow$ Modulo di Young

$J \rightarrow$ Momento di Inerzia

Essendo lo schema simmetrico ed il carico ripartito q uniformemente distribuito sulla trave reale, le deformate sarà altrettanto simmetriche quindi le rotazioni uguali :

$$\gamma_A = \gamma_B = \frac{V_A^*}{E \cdot J} = \frac{V_B^*}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{24} q l^3 \right) \cdot \frac{1}{E J} = \frac{q l^3}{24 E J}$$

$$\gamma_A = \gamma_B = \frac{q l^3}{24 E J}$$



ABBASSAMENTO : freccia massima

Conoscendo ora la situazione nella TRAVE AUSILIARIA (ossia Carico Concentrato Ausiliario e Reazioni Vincolari Ausiliarie), possiamo determinare il massimo spostamento verticale della trave reale nelle mezzeria, ossia la freccia massima :

$$f_{\max} = \frac{M_{\max}^*}{E \cdot J}$$

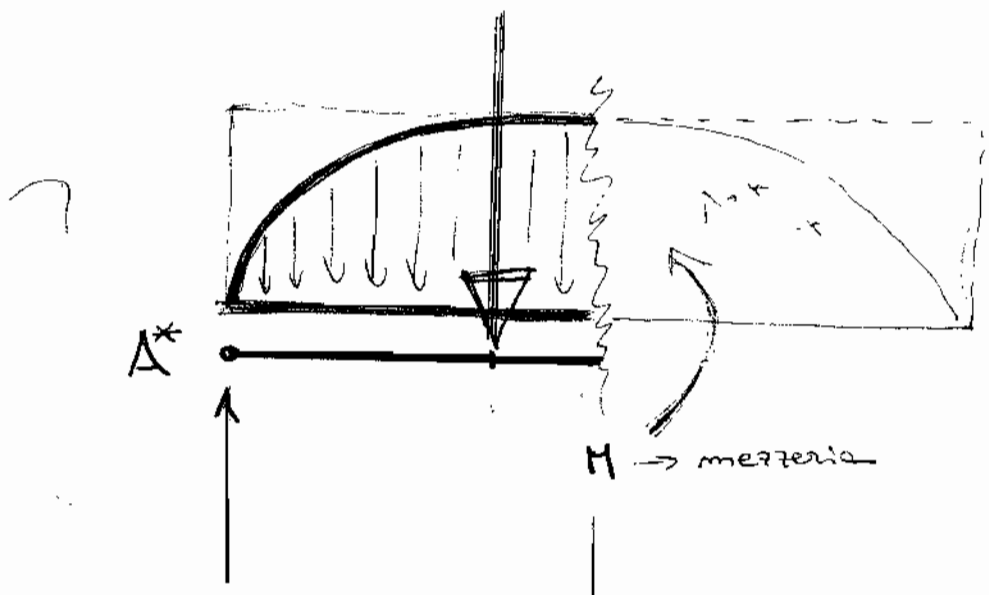
dove il momento massimo ausiliario è dato dalla seguente equazione di equilibrio alle rotazioni con polo in mezzera:

$$M_{max}^* - V_A^* \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + \frac{\Delta m}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}\right) = 0$$

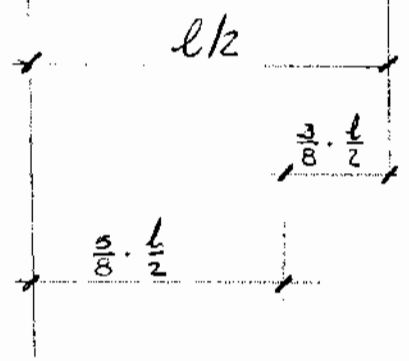
dove: $\frac{l}{2}$ → braccio della reazione vincolare ausiliaria V_A^* dall'estremo A sino alla mezzera M;

$$\frac{\Delta m}{2} = \frac{Q^*}{2}$$

rotazione antioraria per i momenti;



$$V_A^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{1}{24} q l^3$$



$\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}$ → sarebbe il braccio del carico concentrato $\frac{\Delta m}{2}$ rispetto alla mezzera M;

$\frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2}$ → sarebbe il braccio del momento della coppia $(V_A^*; \frac{\Delta m}{2})$ che dà una rotazione oraria alla trave;

Pertanto, nella sezione di estremità Π , compare il
 MOMENTO MASSIMO AUSILIARIO M_{max}^* che contrasta
 il MOMENTO DELLA COPPIA $(V_A^*; \frac{A_m}{2})$ con una rotazione
 antioraria e l'equazione di equilibrio alle
 rotazioni con polo in Π , diventa :

$$M_{max}^* - V_A^* \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + \frac{A_m}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$M_{max}^* = V_A^* \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - \frac{A_m}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}\right)$$

ma $V_A^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{A_m}{2}$

quindi l'equazione possiamo scriverla come :

$$M_{max}^* = V_A^* \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - V_A^* \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}\right)$$

ora essendo $V_A^* \cdot \frac{l}{2}$ in comune può essere messa in evidenza :

$$M_{max}^* = \left(V_A^* \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \left[1 - \frac{3}{8}\right] = V_A^* \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8}\right)$$

braccio del momento della
 coppia $(V_A^*; \frac{A_m}{2})$

Sostituendo a V_A^* il suo valore, si ottiene :

$$M_{max}^* = \left(\frac{1}{24} q l^3\right) \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \cdot q l^4$$

Calcoliamo il MOMENTO MASSIMO AUSILIARIO \bar{e} :

$$M_{max}^* = \frac{5}{384} \cdot ql^4$$

che sostituito nella formula della FRECCIA MASSIMA si ottiene, l'abbassamento massimo della deformata (deformazione elastica della trave ~~reale~~) che si verifica nella metà :

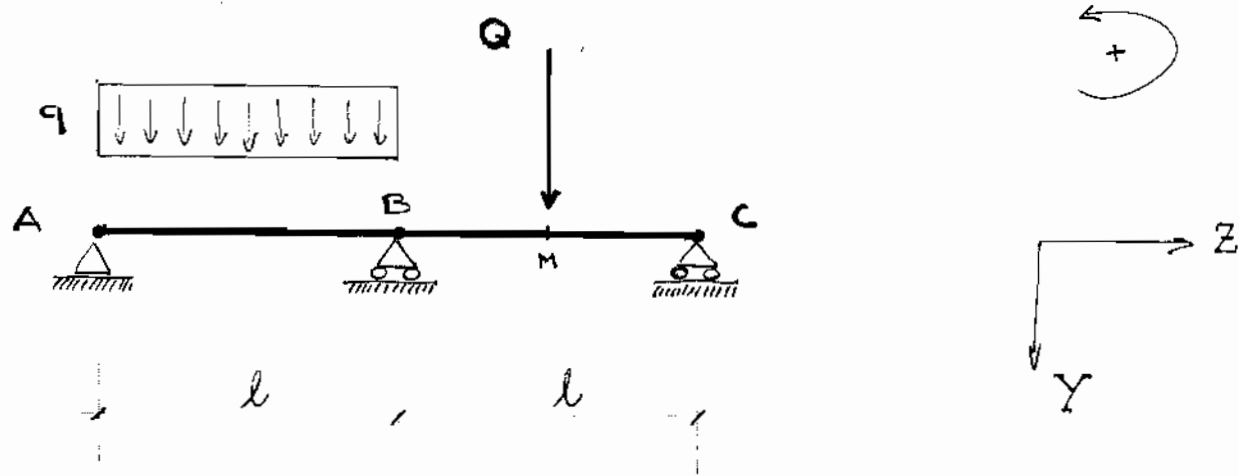
$$f_{max} = \frac{M_{max}^*}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{5}{384} \cdot ql^4 \right)$$

$$f_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{E \cdot J}$$

RICORDIAMO CHE :

La freccia massima \bar{e} relativa al momento massimo Ausiliario ;

questo perché la freccia, che rappresenta lo spostamento verticale della trave reale, può essere calcolata in ogni punto di essa -



ANALISI CINEMATICA

In A abbiamo un APPOGGIO - CERNIERA che impedisce due moti (trasl. orizzontale e verticale) dei 3 moti possibili nel piano, quindi consente la sola rotazione;

In B abbiamo un CARRELLO - CERNIERA che impedisce un moto (la trasl. verticale) dei 3 possibili nel piano, quindi consente due moti (rotazione e trasl. orizzontale).

Stessa cosa in C;

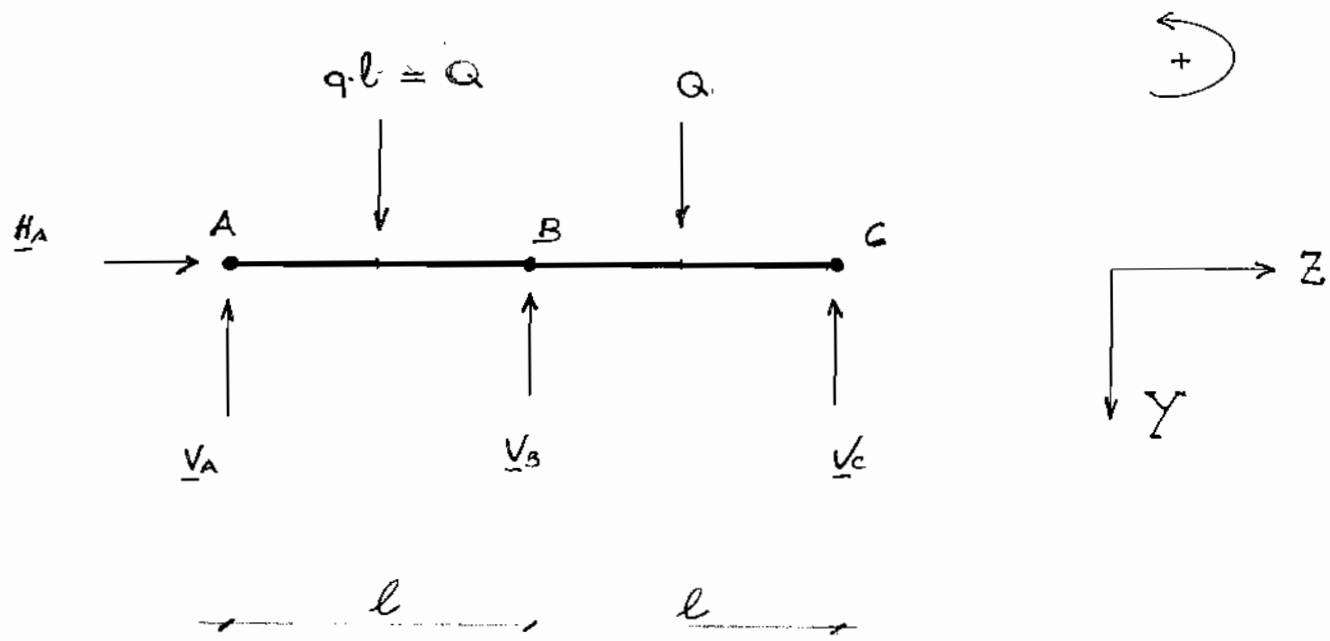
In definitiva, i 4 moti impediti sarebbero i VINCOLI ai quali vanno sostituite le rispettive REAZIONI VINCOLARI.

$$\boxed{\text{VINCOLI} - \text{G.d.L.} = 4 - 3 = 1} \quad \text{SISTEMA IPERSTATICO una volta.}$$

ANALISI ESTERNA

(2)

Sostituiamo ai vincoli le rispettive REAZIONI VINCOLARI e consideriamo il CARICO RIPARTITO q come se fosse un CARICO CONCENTRATO ($q \cdot l = Q$) nella mezzina del tratto AB, che risulta essere uguale al carico CONCENTRATO Q nella mezzina del tratto BC:



Equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

LUNGO Z : $\boxed{+H_A = 0}$

Non ci sono altre forze longitudinali alla trave -

Equazione di equilibrio alla transl. verticale:

LUNGO Y : $q \cdot l + Q - V_A - V_B - V_C = 0$

Abbiamo così un'equazione in tre incognite, non risolvibile -

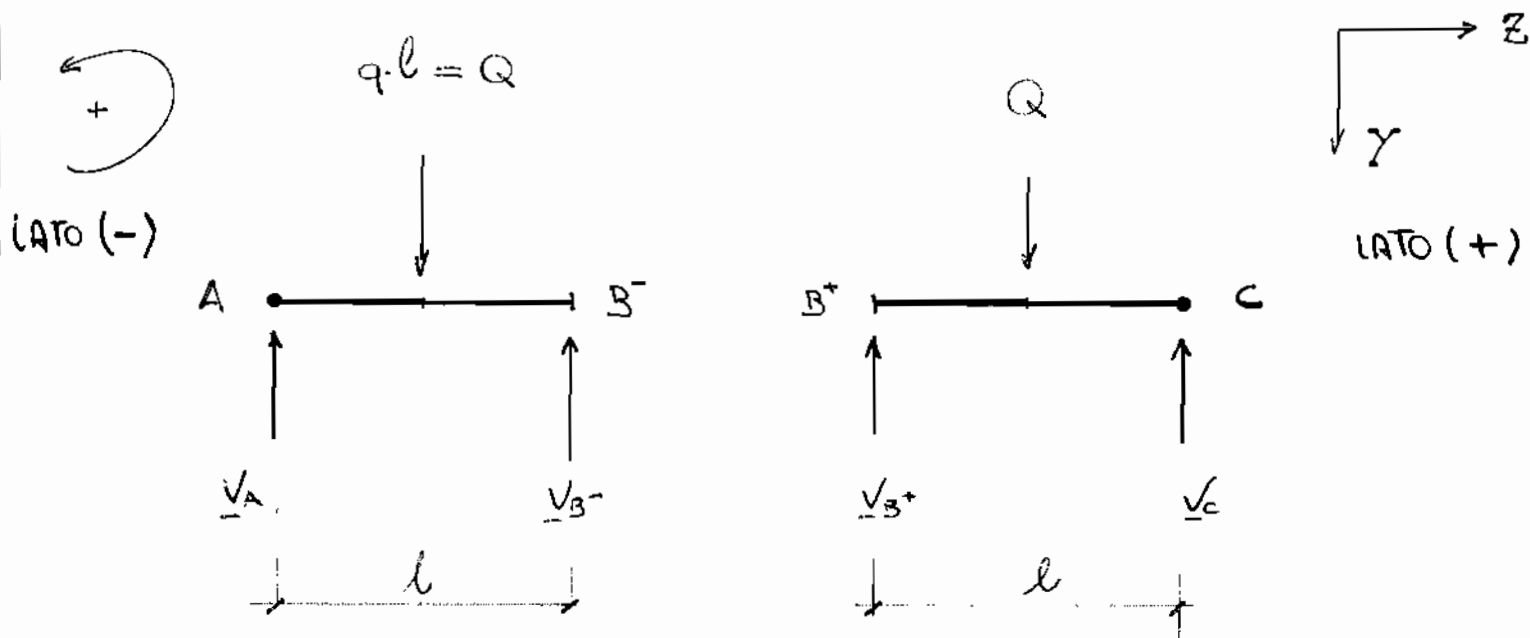
Equazione di equilibrio alla rotazione:

POLO A : $-q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + V_B \cdot (l) - Q \cdot \left(\frac{3}{2}l\right) + V_C \cdot (2l) = 0$

Abbiamo così un'equazione in due incognite, non risolvibile -

3

L'ANALISI ESTERNA per l'intera trave ci conduce ad equazioni non risolubili (caratterizzate da più incognite); pertanto, supponiamo di separare la trave in due parti uguali, quindi nel punto B, considerando $H_A = 0$ (unica incognita determinata) =



Equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (-) :

$$\text{Polo } B^- : + q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - V_A \cdot (l) = 0$$

$$V_A \cdot l = \frac{1}{2} q l^2 \rightarrow \boxed{V_A = \frac{1}{2} q \cdot l = \frac{1}{2} Q}$$

Equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (+) :

$$\text{Polo } B^+ : + V_C \cdot (l) - Q \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$V_C \cdot l = \frac{1}{2} Q \cdot l \rightarrow \boxed{V_C = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} q \cdot l}$$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale per il LATO (-) :

$$\text{LUNGO } Y : + q \cdot l - V_A - V_{B^-} = 0$$

$$V_{B^-} = q \cdot l - V_A = q \cdot l - \frac{1}{2} q \cdot l = + \frac{1}{2} q \cdot l$$

$$\boxed{V_{B^-} = + \frac{1}{2} q \cdot l = \frac{1}{2} Q}$$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale per il lato (+) :

(4)

$$\underline{\text{LUNGO } Y} : + Q - V_B - V_C = 0$$

$$V_B = Q - V_C = Q - \frac{1}{2}Q = + \frac{1}{2}Q$$

$$\boxed{V_B = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}q \cdot l}$$

Ma a noi interessa trovare V_B ;

pertanto, tornando all'analisi statica dell'intera trave, sostituiamo i valori di V_A e V_C nell'equazione di equilibrio alla trasl. verticale :

$$\underline{\text{LUNGO } Y} : + q \cdot l + Q - V_A - V_B - V_C = 0$$

$$V_B = + q \cdot l + Q - V_A - V_C$$

$$V_B = + q \cdot l + Q - \left(\frac{1}{2}q \cdot l\right) - \left(\frac{1}{2}Q\right) = \frac{1}{2}q \cdot l + \frac{1}{2}Q$$

$$V_B = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q = Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = Q = q \cdot l}$$

Per verifica, sostituiamo il valore di V_C nell'equazione di equilibrio alla rotazione :

$$\underline{\text{POLO A}} : - q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2}\right) + V_B \cdot (l) - Q \cdot \left(\frac{3}{2}l\right) + V_C \cdot (2l) = 0$$

$$V_B \cdot l = + \frac{1}{2}q l^2 + \frac{3}{2}Q \cdot l - V_C \cdot 2l$$

$$V_B \cdot l = + \frac{1}{2}q l^2 + \frac{3}{2}Q \cdot l - \left(\frac{1}{2}Q\right) \cdot 2l$$

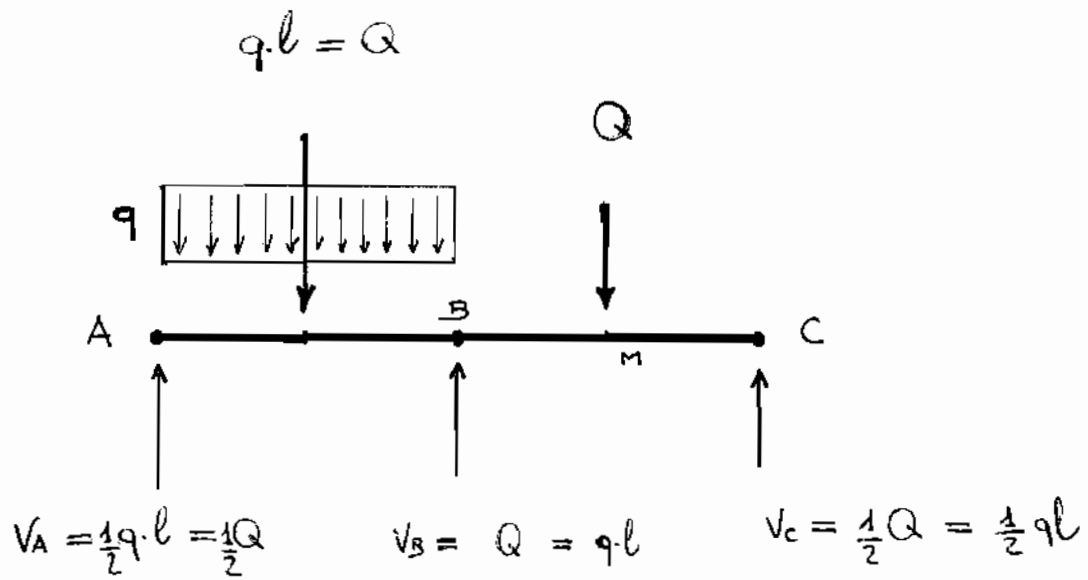
$$V_B \cdot l = + \frac{1}{2}q l^2 + \frac{3}{2}Q \cdot l - Q \cdot l = \frac{1}{2}q l^2 + \frac{1}{2}Q \cdot l$$

$$V_B \cdot l = \frac{1}{2}q l^2 + \frac{1}{2}Q \cdot l = l \cdot \left(\frac{1}{2}q l + \frac{1}{2}Q\right)$$

$$V_B = \frac{1}{2}q l + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q = Q$$

$$\boxed{V_B = Q = q \cdot l}$$

Ora che abbiamo determinato le quattro REAZIONI VINCOLARI, possiamo concludere l'analisi esterna con il seguente SCHEMA STATICO:



ANALISI INTERNA

6

SOLO MOMENTO FLETTENTE

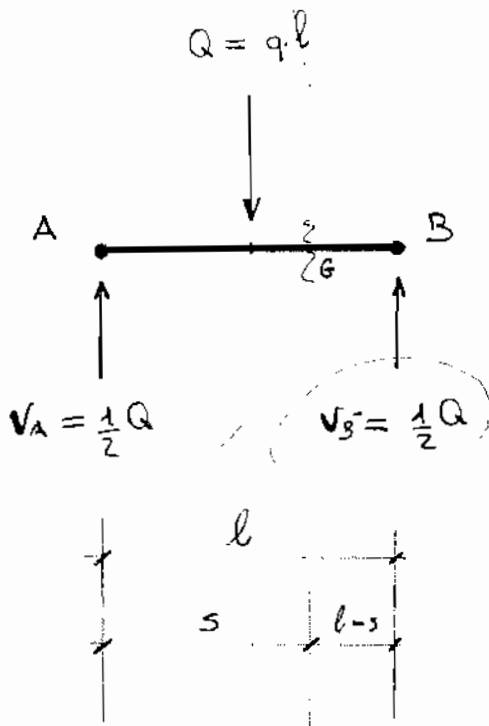
Ai fini del nostro problema (determinare la deformazione elastica della trave), è necessario studiare solo il momento flettente, come analisi interna;

pertanto, dovendo essere questa trave caricata diversamente nelle due metà, per determinare il rispettivo andamento grafico del momento flettente, abbiamo bisogno di sezionare la trave in due punti differenti.

Iniziamo a sezionare la trave tra A e B in un generico punto G, considerando il carico ripartito q come se fosse un carico concentrato $Q = q \cdot l$ nella mezzina di questo tratto:

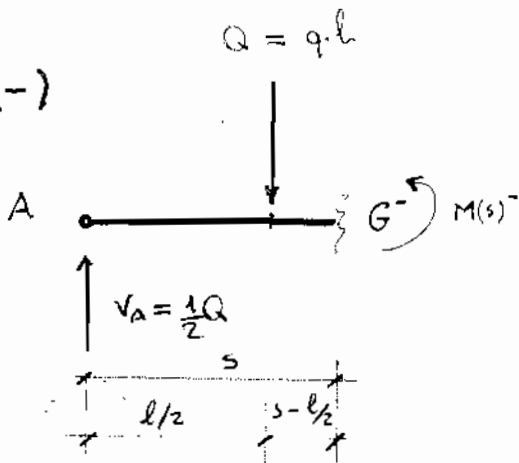
TRATTO AB

$$\frac{l}{2} \leq s \leq l$$

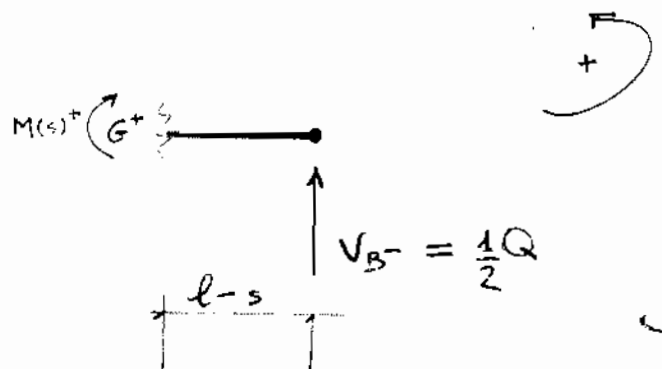


Guardando solo il tratto AB è necessario considerare in B solo la reazione dovuta al carico Q e quindi V_{B^-} ;

LATO (-)



LATO (+)



(7)

Scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il lato (-) ipotizzando un momento flettente $M(s)$, nella sezione di taglio G^- , positivo per la convenzione delle fibre (tende quelle di sotto):

$$\underline{\text{Polo } G^-} : + M(s)^- + Q \cdot \left(s - \frac{l}{2}\right) - V_A \cdot (s) = 0$$

$$M(s)^- = V_A \cdot s - Q \cdot \left(s - \frac{l}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}Q\right) \cdot s - Q \cdot \left(s - \frac{l}{2}\right)$$

$$M(s)^- = \frac{1}{2}Q \cdot s - Q \cdot s + \frac{1}{2}Q \cdot l = -\frac{1}{2}Q \cdot s + \frac{1}{2}Q \cdot l$$

$$\boxed{M(s)^- = \frac{1}{2}Ql - \frac{1}{2}Q \cdot s} \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{l}{2} \rightarrow M(s)^- = \frac{1}{4}Q \cdot l \quad (\text{in } M) \\ s = l \rightarrow M(s)^- = 0 \quad (\text{in } B) \end{array} \right.$$

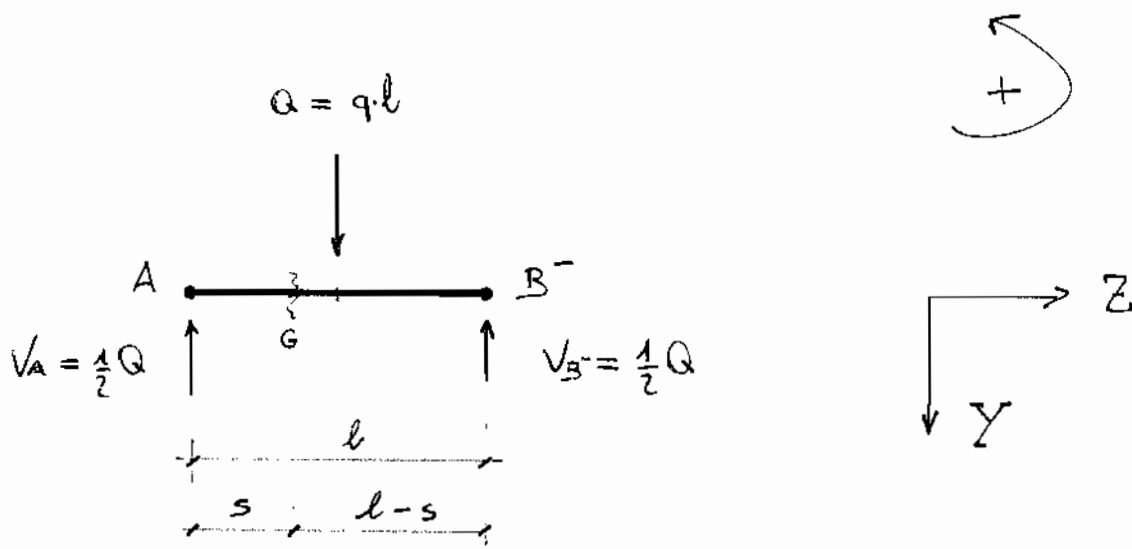
Il segno positivo del risultato è direttamente quello da riportare nel grafico (ricordiamo che $M(s)^-$ lo abbiamo ipotizzato convenzionalmente positivo) ed inoltre conferma il senso di rotazione antiorario ipotizzato all'inizio, che tende le fibre inferiori della trave.

Il grafico del momento flettente sarà positivo e varierà con legge lineare dalla mezzina ($\frac{1}{4}Ql$) al punto B (in cui si annulla) in quanto la variabile s non è quadratica.

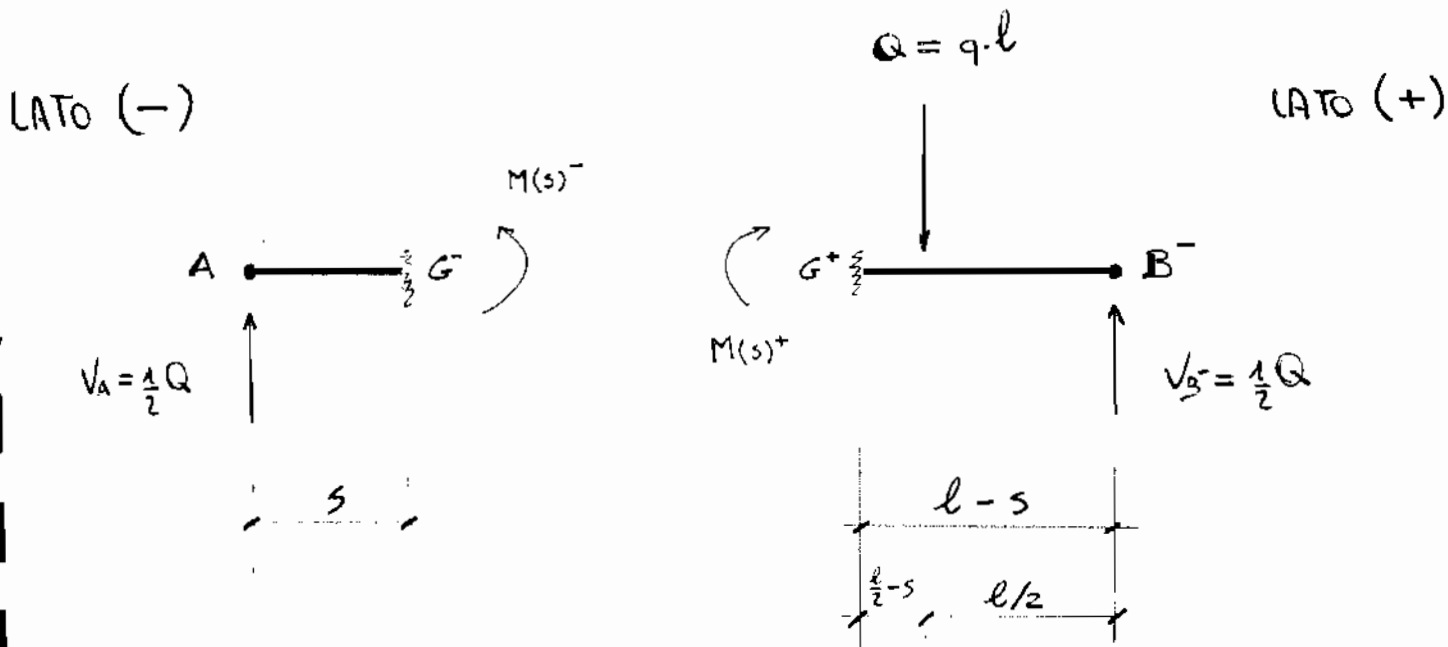


TRATTO A-B = $0 \leq s \leq l/2$

Sezioniamo ora il tratto AB in un punto G prima della mezzeria, andando a vedere cosa succede al momento flettente facendo variare S tra A e la mezzeria:



Separando i due lati, si presenta come:



Ipotizzando un momento flettente $M(s)^-$ nella sezione di taglio G^- , positivo per la convenzione delle fibre (tende quelle di sotto), scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (-):

POLO G^- : $+ M(s) - V_A \cdot (s) = 0$

$M(s) = V_A \cdot s = (\frac{1}{2} Q) \cdot s$

$M(s) = \frac{1}{2} Q \cdot s$

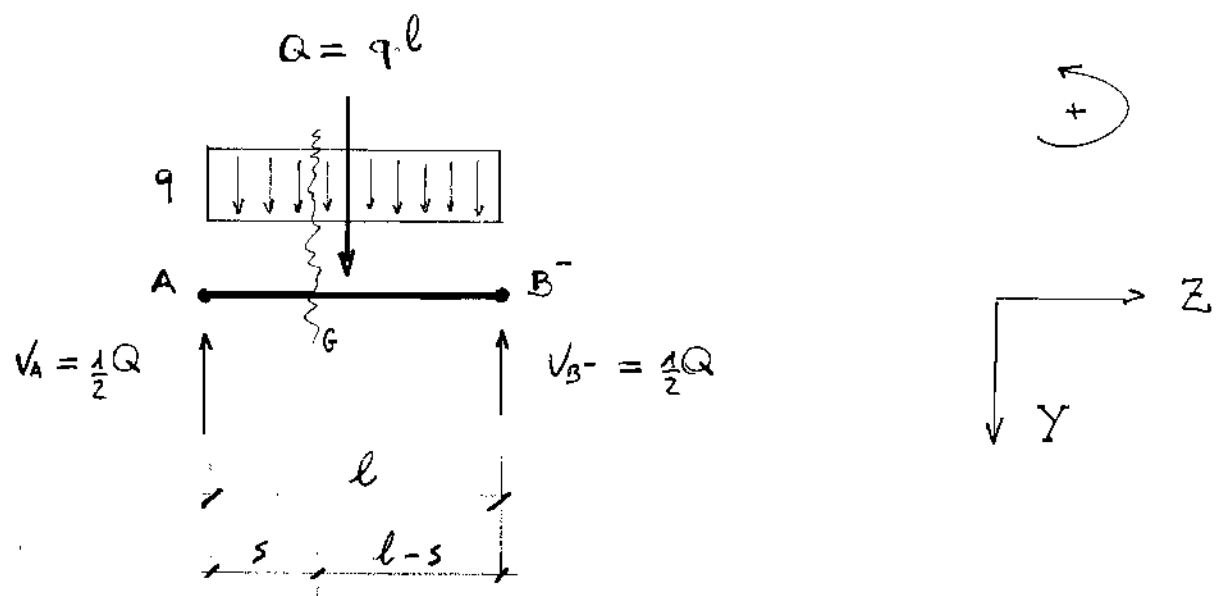
Ora facendo variare s tra 0 ed $\frac{l}{2}$, si ottiene :

$$M(s) = \frac{1}{2} Q \cdot s \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \quad (\text{in } A) \\ s=\frac{l}{2} \rightarrow M(s) = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4} Q \cdot l \quad (\text{in } M) \end{cases}$$

Il segno positivo del risultato ottenuto è direttamente quello da riportare nel diagramma del momento flettente e coincide con il valore determinato per il caso $(\frac{l}{2} \leq s \leq l)$ inoltre, questo segno positivo conferma il senso di rotazione antiorario di $M(s)$ in G ipotizzato all'inizio, che pertanto tende le fibre inferiori della Trave (quindi positivo per la convenzione) -

Il grafico del momento flettente sarà positivo e varierà con legge lineare da A sino alla massima M .

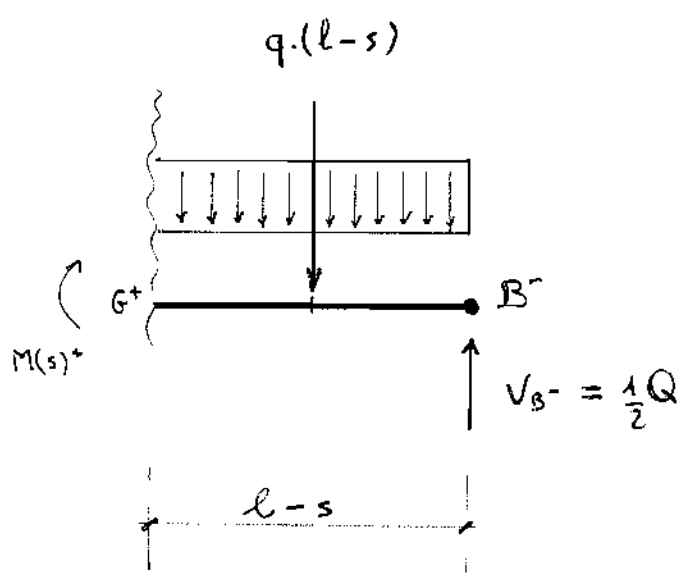
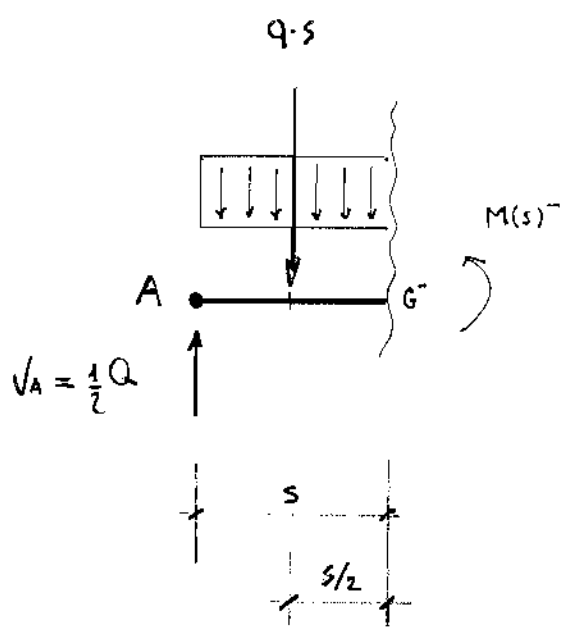
Sezioniamo ora il tratto A-B in un generico punto G prima della mezzia, considerando questa volta l'intero CARICO RIPARTITO ($Q = q \cdot l$) :



Separando i due lati, il tratto A-B si presenta come :

LATO (-)

LATO (+)



Ipotesizzando un MOMENTO FLETTENTE $M(s)^-$ nella sezione di Taglio G^- , positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (tende quelle di sotto), scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (-) :

Polo G^- : $+ M(s) + q \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2}\right) - V_A \cdot (s) = 0$

$M(s) = V_A \cdot s - \frac{1}{2} q \cdot s^2 = \frac{1}{2} Q \cdot s - \frac{1}{2} q \cdot s^2$

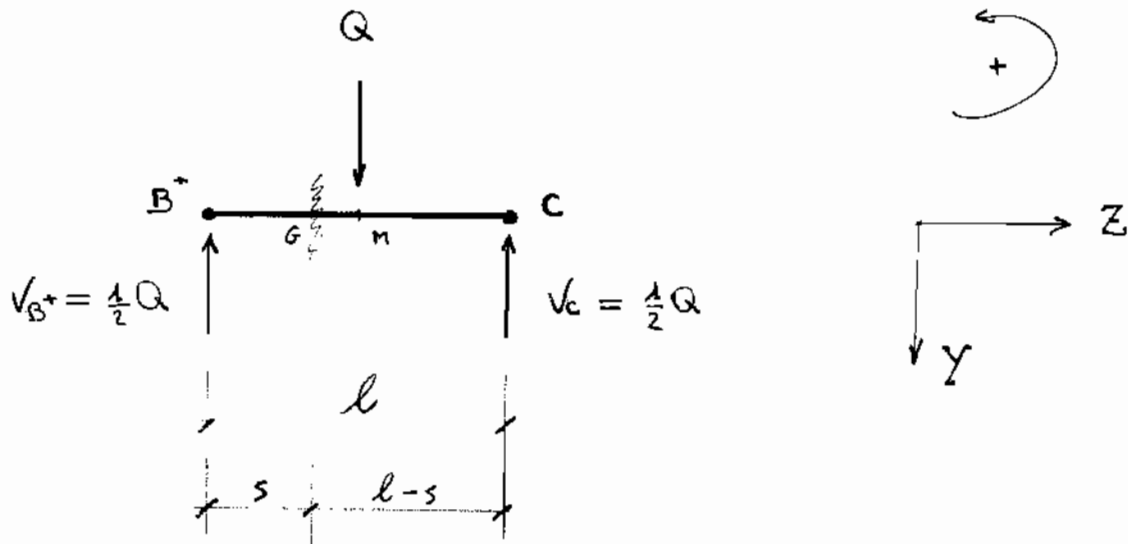
Ora facendolo variare s tra 0 ed l , si ottiene :

$$M(s) = \frac{1}{2} Q \cdot s - \frac{1}{2} q \cdot s^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} s=0 \rightarrow M(s) = 0 \\ s=l/2 \rightarrow M(s) = \frac{1}{8} Ql = \frac{1}{8} ql^2 \\ s=l \rightarrow M(s) = 0 \end{array} \right.$$

Il segno positivo del risultato ottenuto è direttamente quello da riportare nel diagramma del momento flettente (si disegna dalla parte della LINEA DI RIFERIMENTO) ed inoltre conferma il senso di rotazione antiorario di $M(s)$ in G ipotizzato all'inizio che pertanto tende le fibre inferiori della trave (quindi positivo per la convenzione).

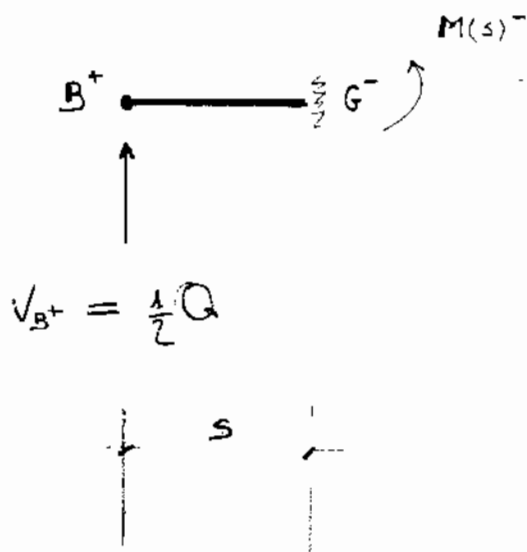
Il grafico del momento flettente sarà positivo e definito da una legge quadratica (in quanto la variabile s è di 2° grado) con un andamento parabolico che assumerà valore nullo agli estremi A e B, valore massimo in mezzera.

Consideriamo ora solo il tratto B-C, separatamente dal tratto A-B ;
 per determinare il momento Flettente, sezioniamo il tratto B-C in un punto G prima della mezzera M, andando a vedere cosa succede ad $M(s)$ facendo variare s tra B ed M :

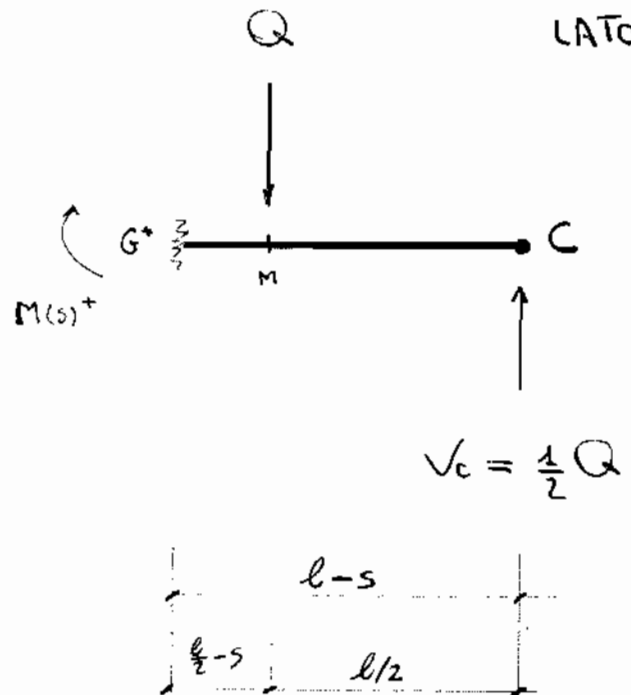


Separando i due lati, il tratto B-C si presenta come :

LATO (-)



LATO (+)



ipotizzando un MOMENTO FLETTENTE $M(s)^-$ nella sezione di taglio G del LATO (-), positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (tenete quelle di sotto della trave), scriviamo l'equazione di equilibrio alle rotazioni per il LATO (-) :

$$\begin{aligned} \text{Polo } G^- : \quad + M(s)^- - V_{B^+} \cdot (s) &= 0 \\ + M(s)^- &= V_{B^+} \cdot (s) = \frac{1}{2} Q \cdot s \end{aligned}$$

Ora facendo variare s tra 0 (in B^+) ed $\frac{l}{2}$ (in M) :

$$\boxed{M(s)^- = \frac{1}{2} Q \cdot s} \quad \begin{cases} s=0 \rightarrow M(s)^- = 0 & (\text{in } B^+) \\ s = \frac{l}{2} \rightarrow M(s)^- = \frac{1}{4} Q \cdot l & (\text{in } M) \end{cases}$$

Il segno positivo del risultato ottenuto ($M(s)^- = \frac{1}{4} Q \cdot l$) è direttamente quello da riportare nel diagramma del momento FLETTENTE ed inoltre conferma il senso di rotazione antiorario di $M(s)^-$ in G^- ipotizzato all'inizio, che pertanto tiene le fibre inferiori della trave (quindi positivo per la convenzione) -

Il grafico del MOMENTO FLETTENTE sarà positivo e varierà con legge lineare (in quanto la variabile s non è quadratica) da B^+ alla mezzera M -

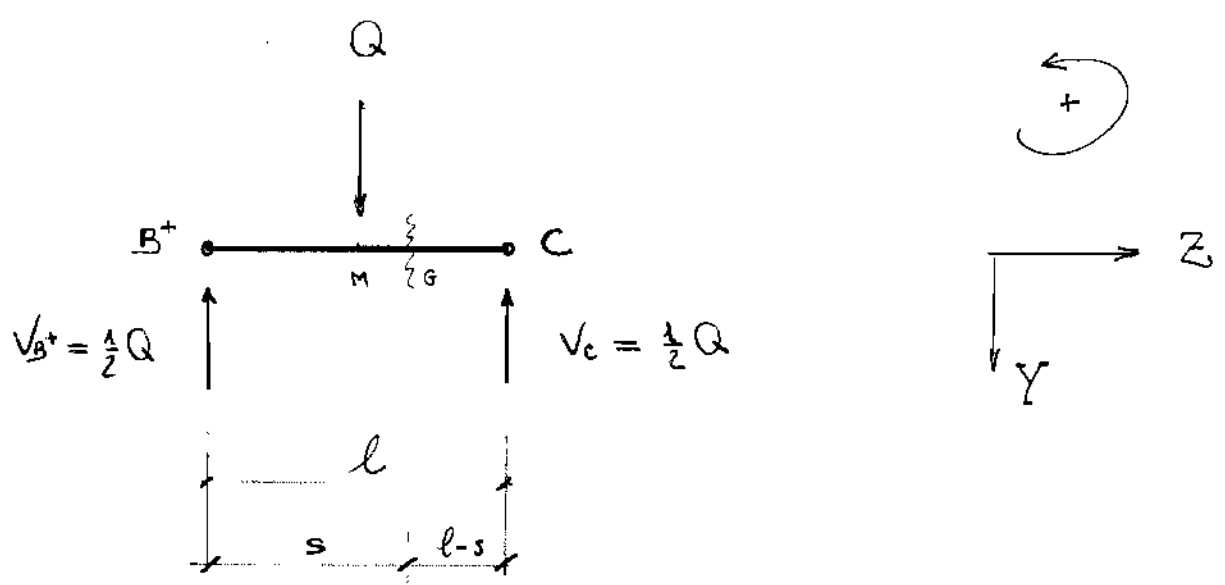
MOMENTO FLETTENTE

Tratto B-C :

$$\frac{l}{2} \leq s \leq l$$

Sezioniamo ora il tratto B-C in un punto G dopo la mezzina M, analizzando a vedere cosa succede al

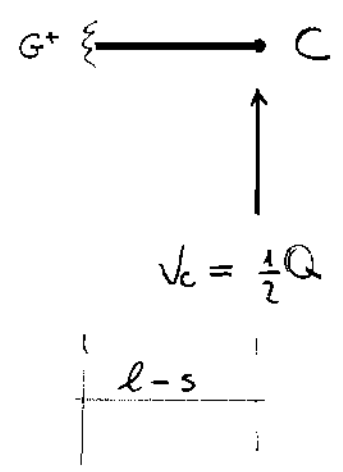
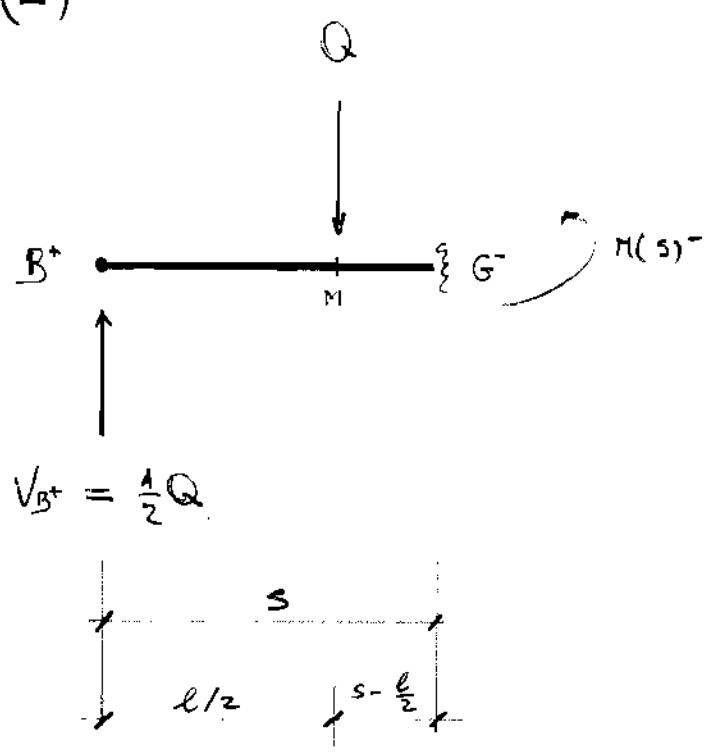
MOMENTO FLETTENTE $M(s)$ facendo variare s tra M e C :



Separando i due lati, il tratto BC si presenta come :

LATO (-)

LATO (+)



ipotizzando un MOMENTO FLETTENTE $M(s)^-$ nella sezione di Taglio G^- del LATO (-), positivo per la CONVENZIONE DELLE FIBRE (tende quelle di sotto della trave), scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione per il LATO (-) :

$$\text{POLO } G^- : + M(s)^- + Q \cdot (s - \frac{l}{2}) - V_{G^+} \cdot (s) = 0$$

$$M(s)^- = V_{G^+} \cdot (s) - Q \cdot (s - \frac{l}{2})$$

$$M(s)^- = \frac{1}{2} Q \cdot s - Q \cdot s + \frac{1}{2} Q \cdot l$$

$$M(s)^- = -\frac{1}{2} Q \cdot s + \frac{1}{2} Q \cdot l$$

Ora, facemolo variare s tra $\frac{l}{2}$ (in M) ed l (in C), si ottiene :

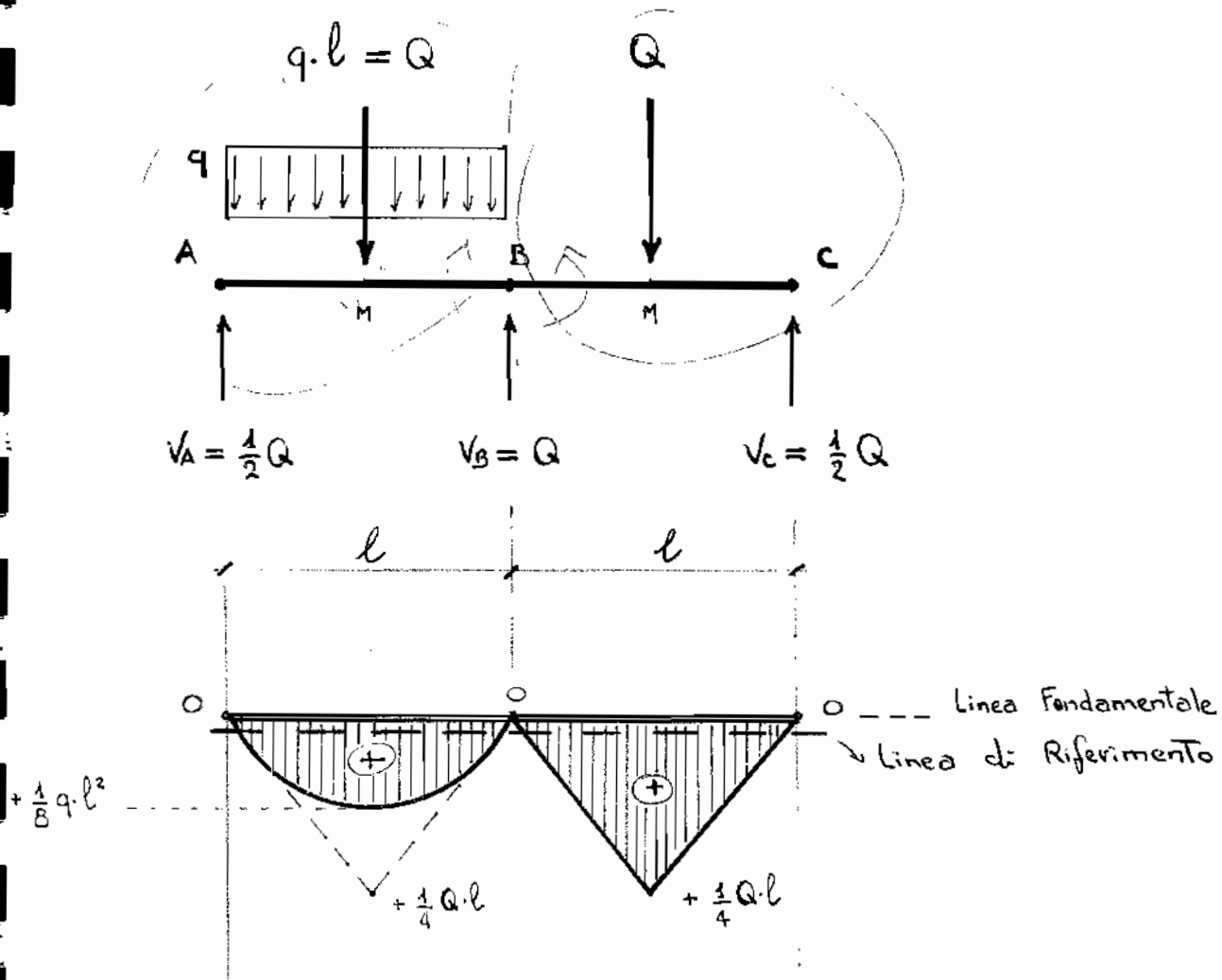
$$\boxed{M(s)^- = \frac{1}{2} Q \cdot l - \frac{1}{2} Q \cdot s} \begin{cases} s = \frac{l}{2} \rightarrow M(s)^- = \frac{1}{4} Q \cdot l \\ s = l \rightarrow M(s)^- = 0 \end{cases}$$

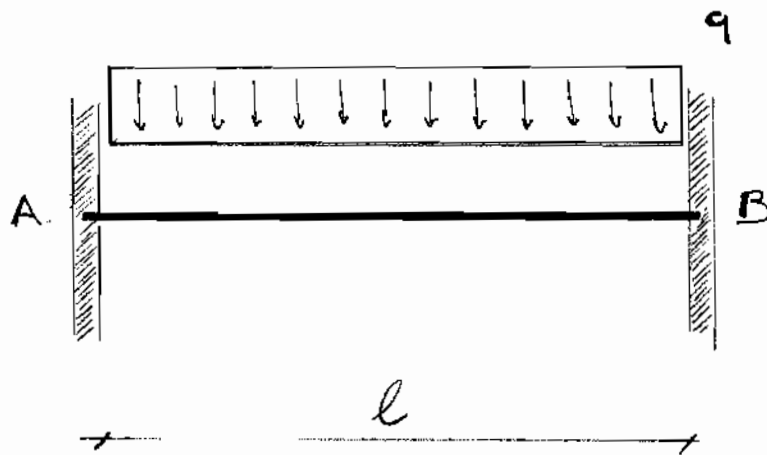
Il segno positivo del risultato ottenuto ($M(s)^- = \frac{1}{4} ql$) è direttamente quello da riportare nel diagramma del momento FLETTENTE e coincide con il valore determinato per il caso ($0 \leq s \leq l/2$) inoltre, questo segno positivo conferma il senso di rotazione antiorario di $M(s)^-$ in G^- ipotizzato all'inizio, che pertanto tende le fibre inferiori della trave (quindi positivo per la convenzione).

Il grafico del MOMENTO FLETTENTE sarà positivo e varierà con legge lineare (in quanto la variabile s non è quadratiche) della mezziera π all'estremo C.

MOMENTO FLETTENTE Diagramma

Sulla base dei risultati ottenuti dall'ANALISI INTERNA del TRATTO AB e BC, rappresentiamo graficamente l'andamento del momento Flettente dell'intera Trave:





ANALISI CINEMATICA

Abbiamo una Trave AB di lunghezza l con due incastri agli estremi, caricata da un carico ripartito di intensità q -

Ricordiamo che l'INCASTRO impedisce tutti e tre i moti possibili (trasl. orizzontale e verticale; rotazione) che la trave può avere nel piano, pertanto in A e B compaiono le rispettive 3 REAZIONI VINCOLARI;

quindi in tutto si hanno 6 reazioni vincolari (ovvero sei moti impediti) alle quali bisogna sottrarre il numero di moti possibili della trave nel piano ($g.d.l. = 3$)

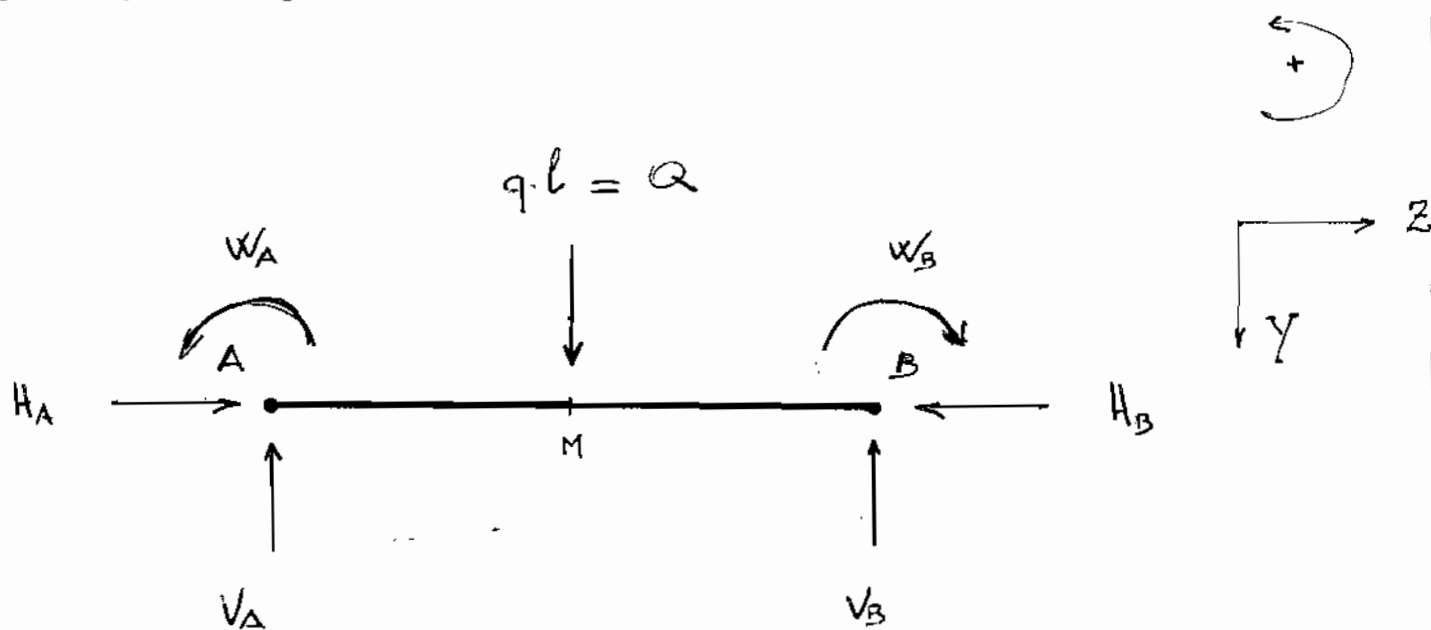
$$6 - 3 = 3 \text{ volte iperstatica}$$

importante è che, il $g.d.l. = 3$ di una trave nel piano è sempre lo stesso, indipendentemente dai vincoli -

(2)

ANALISI ESTERNA

Sostituiamo ai vincoli le rispettive REAZIONI VINCOLARI e consideriamo il CARICO RIPARTITO q come se fosse un CARICO CONCENTRATO ($q \cdot l = Q$) nella mezzera M della trave :



Equazione di equilibrio alle traslazioni orizzontale :

$$\text{LUNGO } Z \rightarrow +H_A - H_B = 0 \rightarrow \boxed{H_A = H_B}$$

si elidono fra loro ;

Equazione di equilibrio alle traslazioni verticali :

$$\text{LUNGO } Y \rightarrow +Q - V_A - V_B = 0$$

$$Q = V_A + V_B \rightarrow \boxed{V_A = \frac{Q}{2} = V_B}$$

Equazione di equilibrio alla rotazione con polo in B :

$$\text{POLO } B \rightarrow +W_B - W_A - V_A \cdot (l) + Q \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$W_B - W_A - \frac{Q}{2}(l) + Q \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$W_B - W_A - \frac{1}{2}Ql + \frac{1}{2}Ql = 0 \rightarrow \boxed{W_A = W_B}$$

SCHEMA STATICO =

3

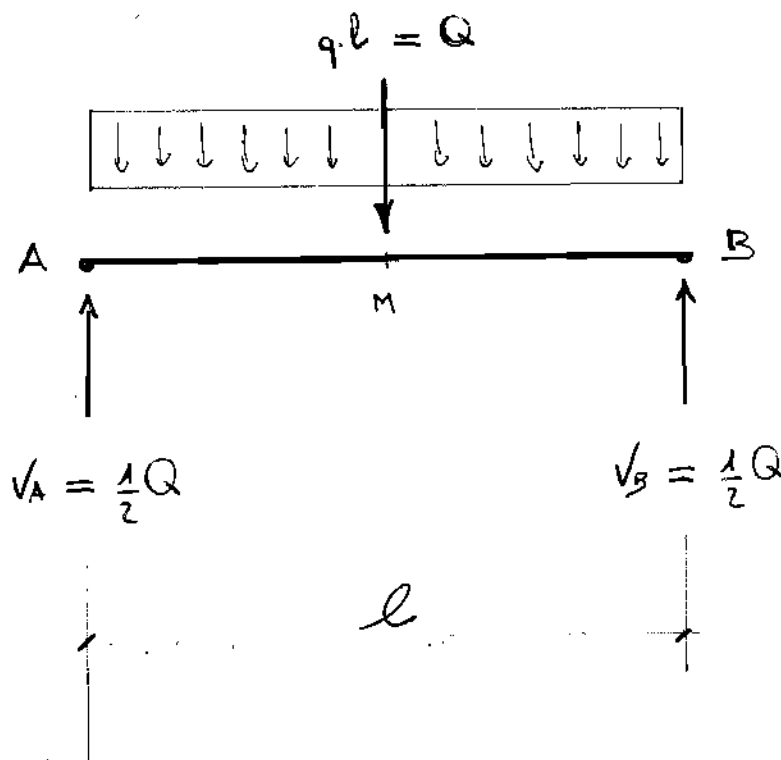
Dai risultati delle EQUAZIONI di EQUILIBRIO è chiaro che :

$$H_A = H_B \rightarrow \text{si elidono tra loro ;}$$

$$V_A = \frac{Q}{2} = V_B \rightarrow \text{in quanto, essendo lo schema simmetrico si ha che } V_A = V_B = V ;$$

$$W_A = W_B \rightarrow \text{si elidono tra loro, rotazioni opposte ;}$$

per tanto, si ha il seguente SCHEMA STATICO che rappresenta l'equilibrio del nostro sistema iperstatico (3 volte) :



IMPORTANTE :

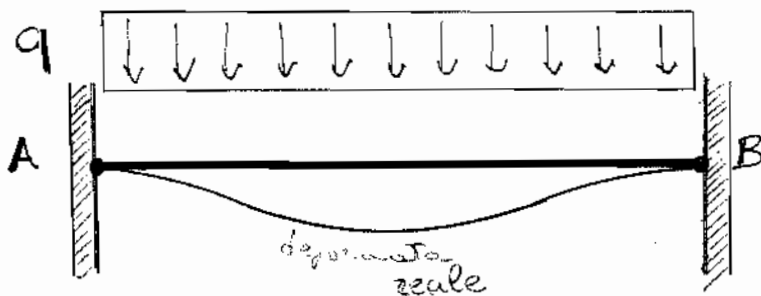
Non è possibile fare l'ANALISI INTERNA di questo sistema iperstatico ; bisogna ricondurlo prima ad un SISTEMA ISOSTATICO ;

4

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

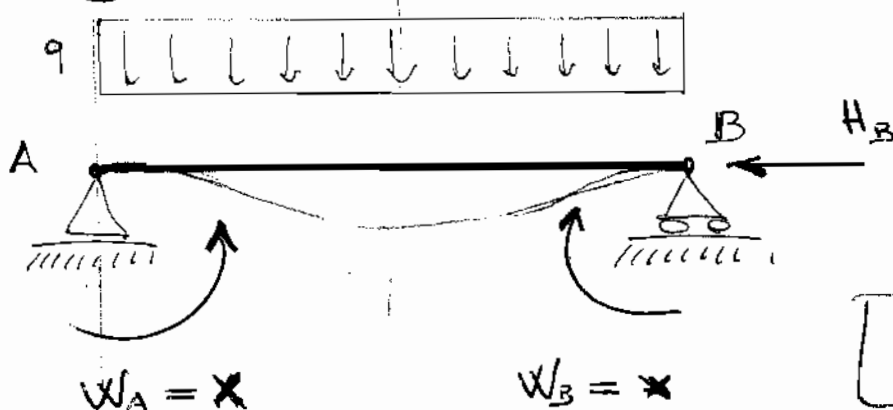
SISTEMA ISOSTATICO ASSOCIATO :

Sostituiamo all'incastro in A un APPOGGIO - CERNIERA ed all'incastro in B un CARRELLI - CERNIERA, per ricondurre il SISTEMA IPERSTATICO (3 volte) di partenza, ad un SISTEMA ISOSTATICO ASSOCIATO, come segue :



Nell'andare a sostituire i vincoli in A e B, bisogna considerare le reazioni vincolari dovute agli incastri, come se fossero delle forze esterne applicate al SISTEMA ISOSTATICO :

$$\left. \begin{aligned} V_A(q, x) &= 0 \\ V_B(q, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \underline{\text{CONDIZIONE DA IMPORRE}}$$

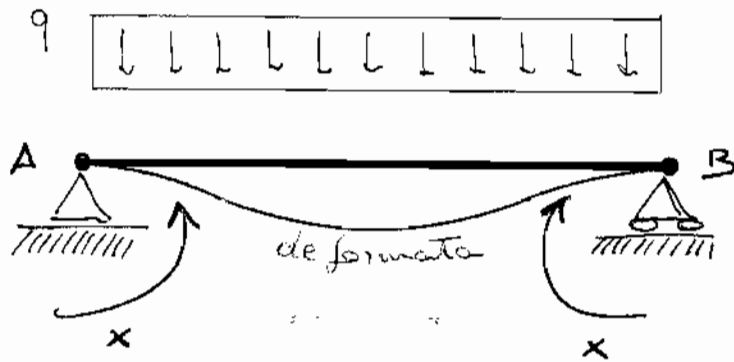


dove

$$\boxed{W_A = W_B = X}$$

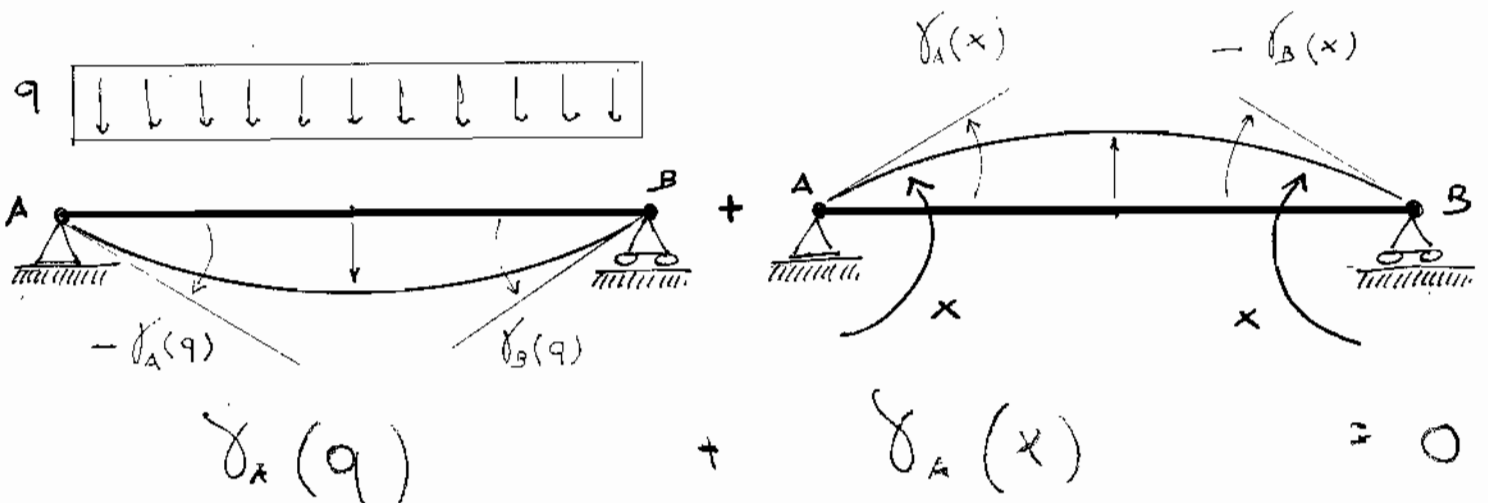
Questo SISTEMA ISOSTATICO con le coppie X e le forze HB, è equivalente al SISTEMA IPERSTATICO.

In particolare, la forza H_B che (5)
abbiamo considerato come una forza esterna,
derivando ~~da~~ direttamente dal sistema Iperstatico
in cui è nulla (per via del fatto che non ci sono
forze esterne), risulta essere nulla anche per
il SISTEMA ISOSTATICO, che si presenta
definitivamente come :



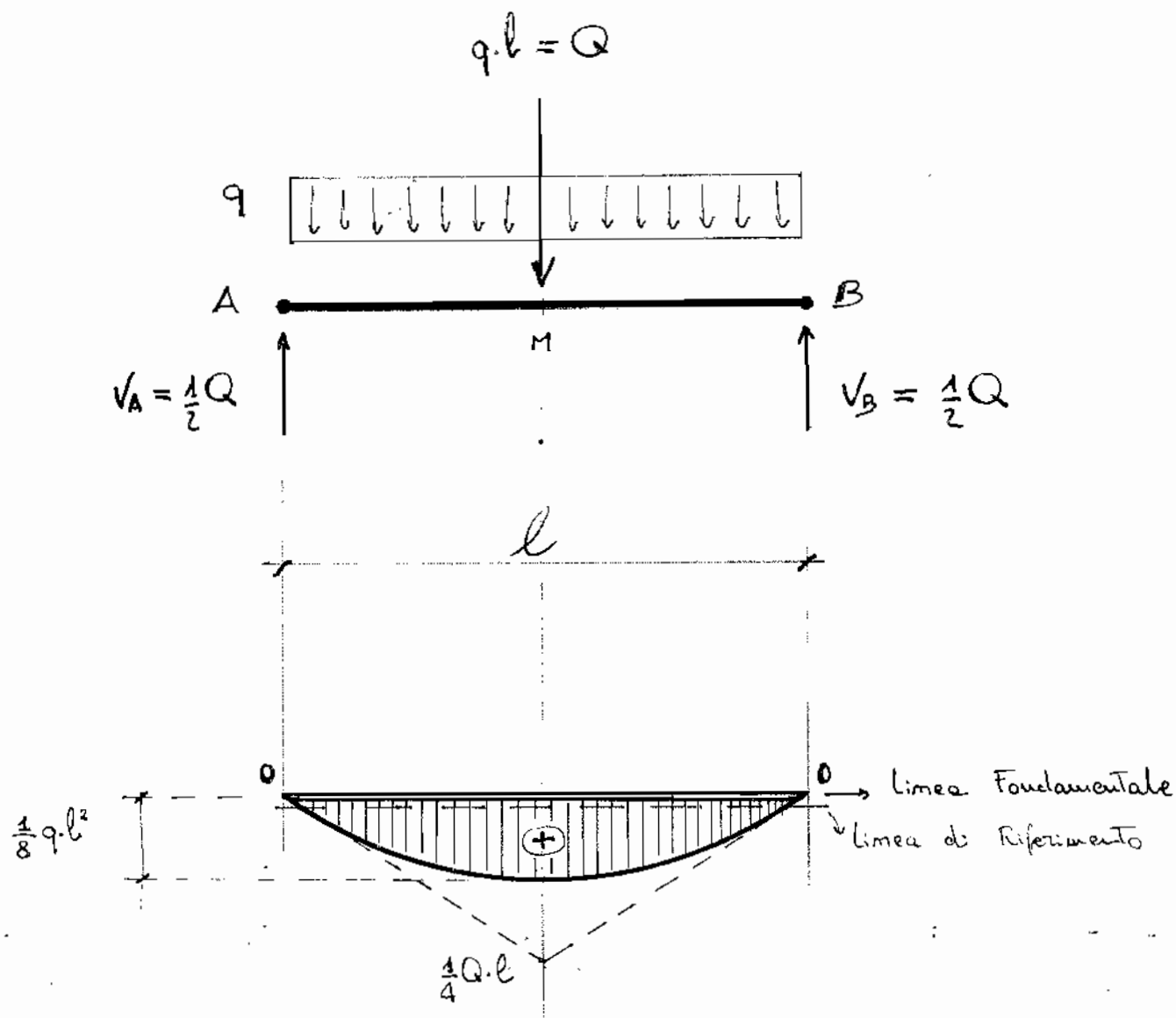
Applichiamo il PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI
scampomendo tale SISTEMA ISOSTATICO, in due sistemi
altrettanto isostatici, come segue :

ROTAZIONI ORARIE POSITIVE ⤵
+

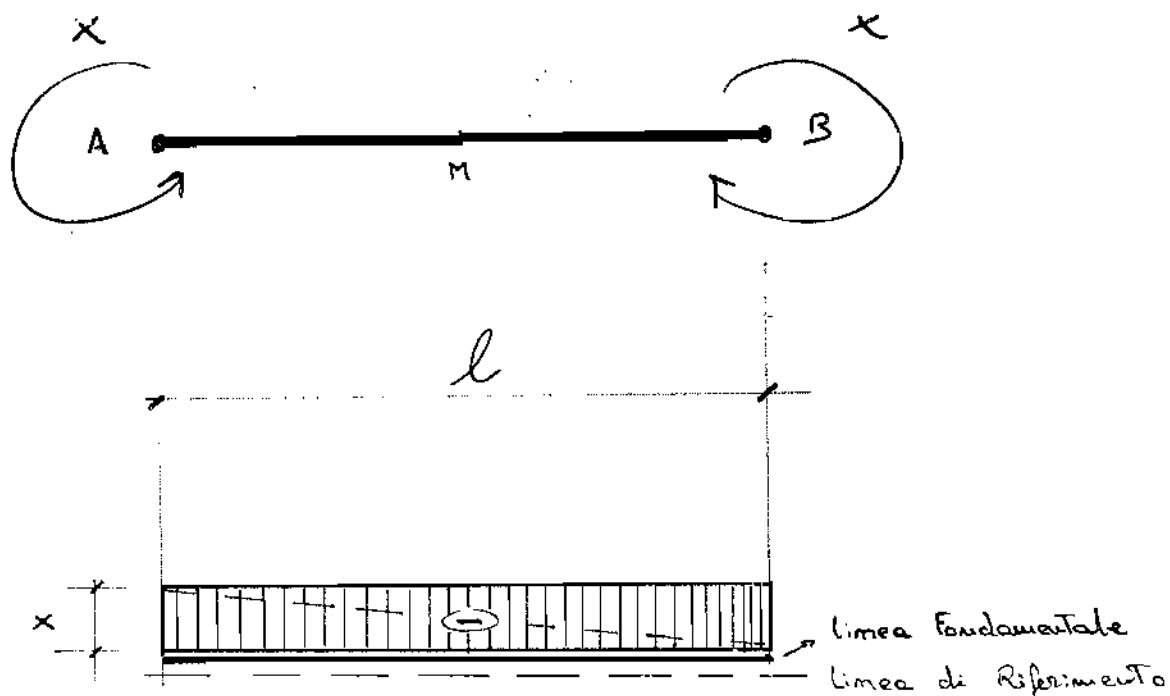


6

Facciamo ora l'ANALISI DELLA TENSIONE INTERNA per la Trave semplice caricata dal solo CARICO RIPARTITO q , analando a sostituire ai vincoli (appoggio in A e carrello in B) le rispettive REAZIONI VINCOLARI, delle quali sappiamo già che quella orizzontale in B è nulla; pertanto, si avrà il seguente DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE che già conosciamo:



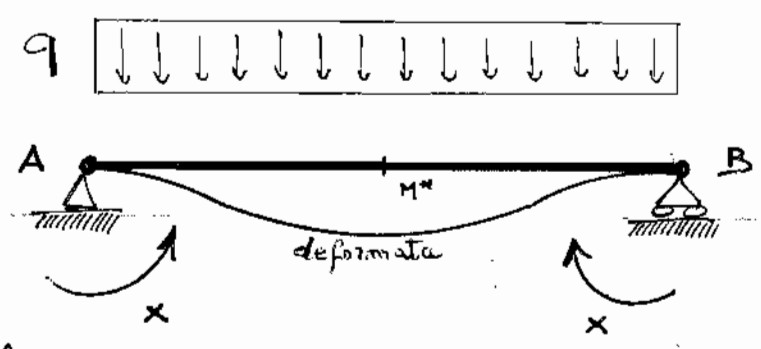
Facciamo ora l'ANALISI DELLA TENSIONE INTERNA per 7
 la Trave semplice caricata dalle sole coppie X ,
 analando e sostituire ai vincoli (appoggio in A e
 carrello in B) le rispettive REAZIONI VINCOLARI,
 delle quali sappiamo già che quella orizzontale
 in B è nulla (non ci sono altre forze orizzontali)
 ed inoltre quelle verticali V_A e V_B si annullano
 per via delle coppie X
 pertanto, si avrà il seguente DIAGRAMMA DEL
 MOMENTO FLETTENTE che già conosciamo, in
 quanto è l'ampliamento del sistema con una sola
 coppia X applicata ad un'estremo (questo sistema presentava
 un diagramma del momento avente forma di un Triangolo
 rettangolo, con cateto minore X e cateto maggiore l):



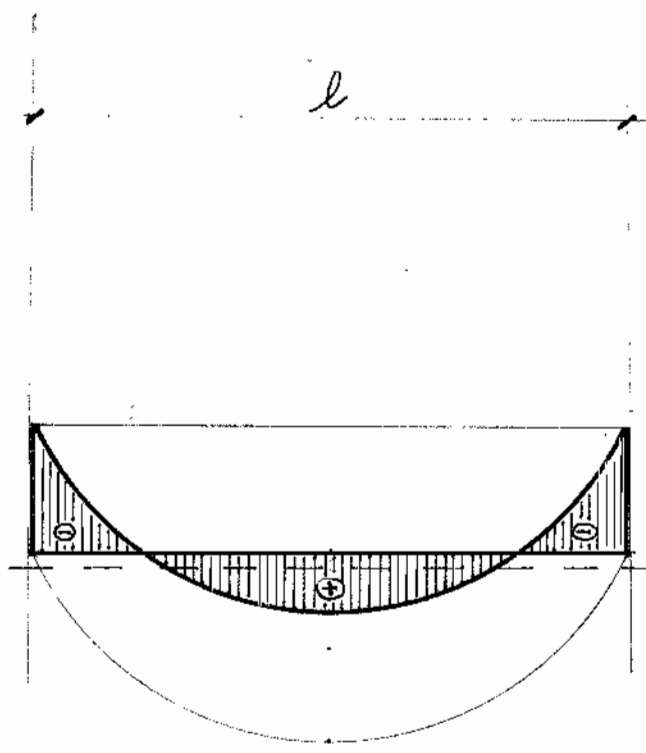
Im definitiva, questo diagramma del momento flettente dovuto alle
 sole coppie X , si mantiene costantemente negativo di modulo X lungo
 tutta la trave; tale rettangolo risulta essere la somma dei due
 triangoli rettangoli che si avrebbero considerando le coppie X una
 alla volta; qualunque sezione prendiamo, il MOMENTO FLETTENTE $M(s)$ di
 reazione alle coppie X , risulta essere negativo (tende le fibre superiori).

DIAGRAMMA COMPLESSIVO DEL MOMENTO

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, grazie al quale abbiamo singolarmente analizzato con semplicità i due sistemi isostatici, possiamo ora sovrapporre i loro due diagrammi del momento flettente allo scopo di ottenere il DIAGRAMMA COMPLESSIVO DEL MOMENTO FLETTENTE relativo al sistema iperstatico (3 volte), come segue:



Il DIAGRAMMA COMPLESSIVO è in scala doppia rispetto agli altri due singoli DIAGRAMMI DEL MOMENTO FLETTENTE



linea Fondamentale
linea di Riferimento

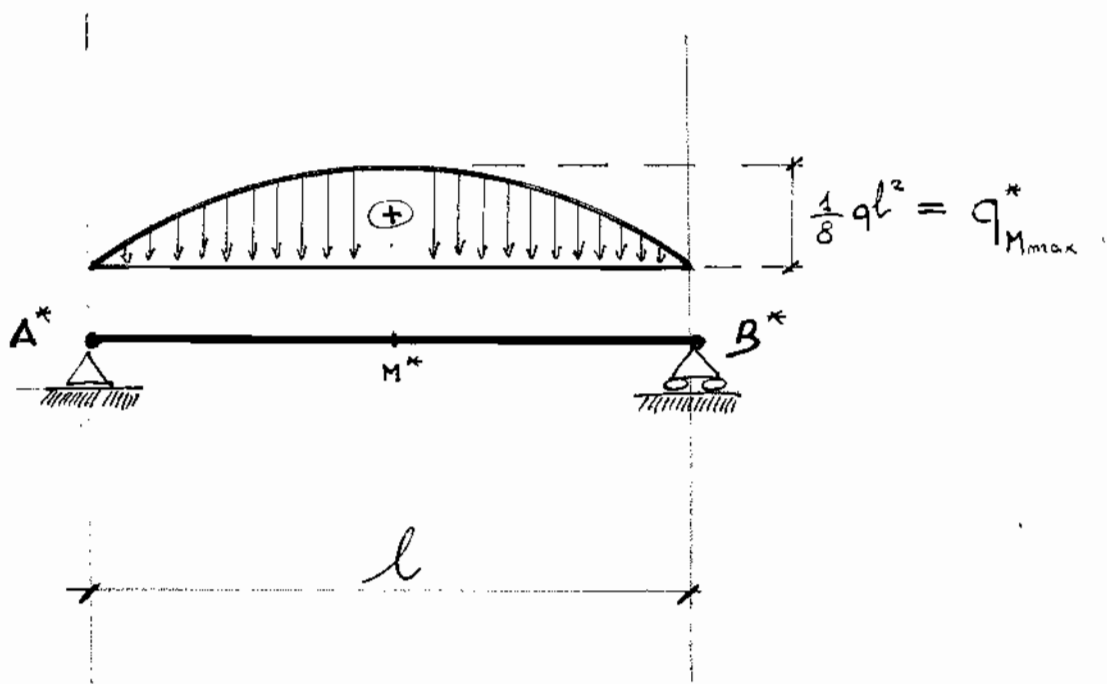
PRINCIPIO DI MOHR:

(9)

Trave Ausiliaria A^*B^* con Carico Ripartito q -

Il PRINCIPIO DI MOHR consiste nell'associare una TRAVE AUSILIARIA (*) alla trave reale considerata; in particolare, il principio prevede l'operazione di caricare superiormente la trave ausiliaria con il diagramma del momento flettente della trave reale considerata, che però conserva il suo segno (se il segno del momento è positivo, allora il carico che sovrasta la trave ausiliaria, punta in basso; se il segno del momento è negativo, allora il carico che sovrasta la trave ausiliaria, punta in alto).

Applichiamo il PRINCIPIO DI MOHR alla trave AB che presenta il solo carico ripartito, ricordando che non è necessario associare ai vincoli in A e B altri tipi di vincoli, che pertanto rimangono gli stessi:

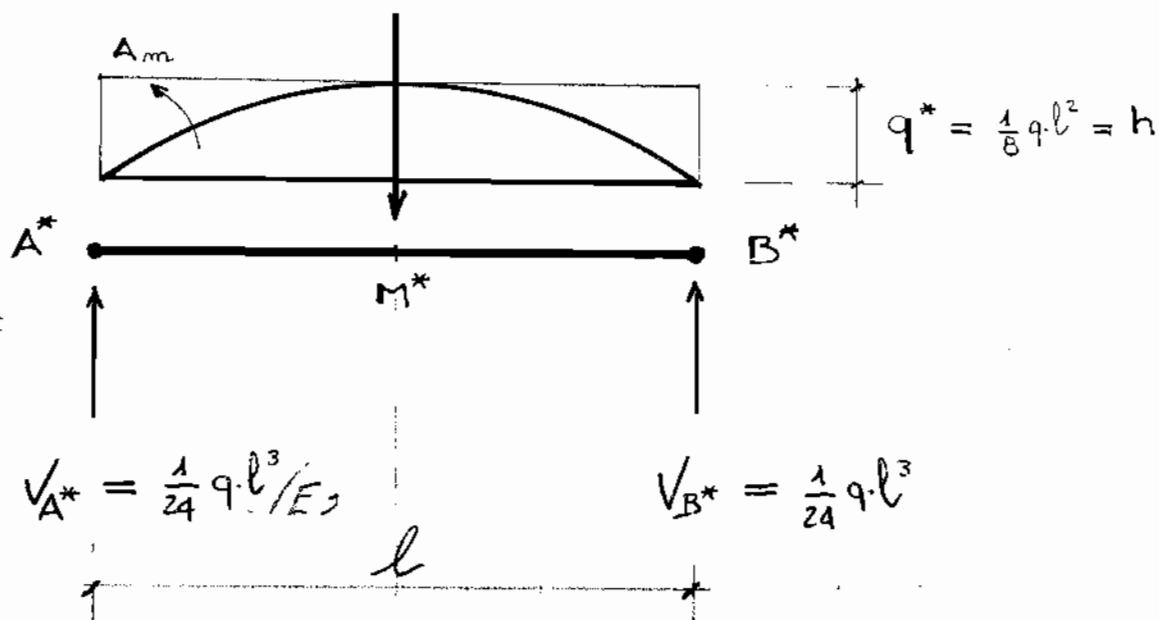


Sostituiamo ai vincoli APPOGGIO-CERNIERA (in A^*) e CARRELLIO-CERNIERA (in B^*) le rispettive reazioni vincolari delle quali sappiamo già che H_{A^*} è nulla (non ci sono forze esterne attive longitudinali alle trave che generano una reazione);

inoltre, consideriamo il CARICO RIPARTITO q^* M_{max} come

se fosse un CARICO CONCENTRATO Q^* , ma del quale non conosciamo ancora il suo effettivo valore (in quanto il carico ripartito non è un rettangolo uniformemente distribuito sulla trave ausiliaria, ma bensì un SETTORE CIRCOLARE che può essere considerato inscritto in un rettangolo di altezza q^* e lunghezza l) =

$$Q^* = \Delta_m = \frac{1}{12} q \cdot l^3 / EJ$$



$$\delta_A(q) = v_{A^*}^*$$

$$V_{A^*} = \frac{1}{24} q \cdot l^3 / EJ$$

$$V_{B^*} = \frac{1}{24} q \cdot l^3$$

dove: $A_m \rightarrow$ area del settore circolare = $\frac{2}{3} \cdot b \cdot h$

$h \rightarrow$ altezza del rettangolo = $\frac{1}{8} q \cdot l^2$

$b \rightarrow$ base del rettangolo = l

Essendo questo sistema già stato analizzato in precedenza, riportiamo ora tutti i risultati conosciuti:

$$\Delta_m = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h = \frac{2}{3} \cdot l \cdot q^* = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \left(\frac{1}{8} q l^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_m = \frac{1}{12} q l^3 = Q^*} \quad \text{CARICO CONCENTRATO AUSILIARIO}$$

$$V_{A^*} = V_{B^*} = \frac{Q^*}{2} = \frac{\Delta_m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} q l^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{A^*} = V_{B^*} = \frac{1}{24} q l^3} \quad \text{REAZIONI VINCOLARI AUSILIARIE}$$

Tenendo conto della DEFORMAZIONE ELASTICA $\left(\frac{1}{E \cdot J}\right)$, si ha:

$$\gamma_A = \gamma_B = \frac{V_{A^*}}{E \cdot J} = \frac{V_{B^*}}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{1}{24} q l^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_A = \gamma_B = \frac{1}{24} \cdot \frac{q l^3}{E \cdot J}} \quad \text{ANGOLI DELLA DEFORMAZIONE}$$

che rappresentano le rotazioni della trave reale nei punti A e B.

Considerando la sezione di mezzo braccio, si ha:

$$M_{max}^* = V_{A^*} \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - \frac{\Delta_m}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{max}^* = \frac{5}{384} q l^4} \quad \text{MOMENTO MASSIMO AUSILIARIO}$$

da cui, tenendo conto della deformazione elastica, si ha:

$$f_{max} = \frac{M_{max}^*}{E \cdot J} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left(\frac{5}{384} q l^4\right) \Rightarrow$$

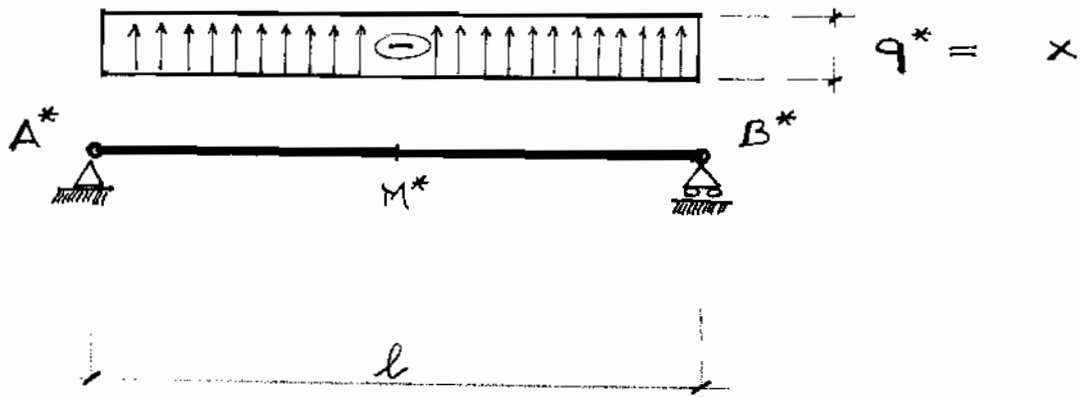
$$\Rightarrow \boxed{f_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{E \cdot J}} \quad \text{FRECCIA MASSIMA}$$

che rappresenta l'abbassamento massimo della trave reale.

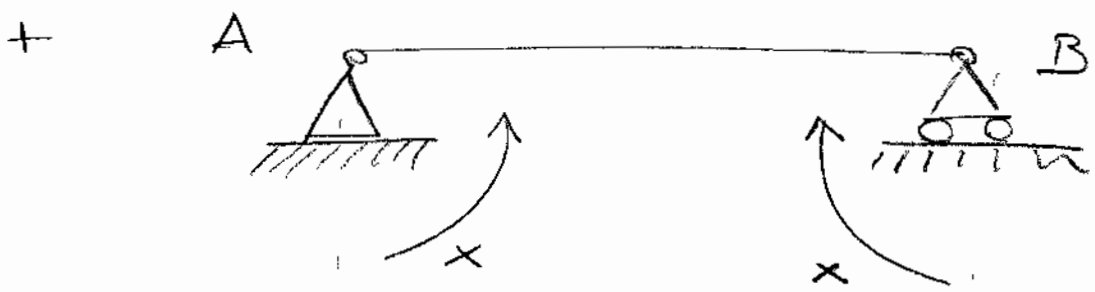
PRINCIPIO DI MOHR :Trave Ausiliaria A^*B^* con le sole COPPIE X

Applichiamo ora il PRINCIPIO DI MOHR alla trave AB che presenta le sole due COPPIE X , ricordando che anche qui non è necessario associare ai vincoli esistenti in A e B , altri tipi di vincoli (in quanto dovremmo associare all'appoggio sempre l'appoggio e al carrello, l'appoggio; ma non ha senso in quanto le reazioni vincolari sono sempre le stesse, ossia quelle verticali che tutt'al più sono nulle per via delle COPPIE X);

per tanto la TRAVE AUSILIARIA si presenta come :

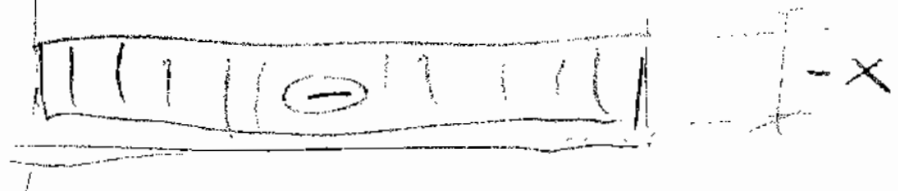


l

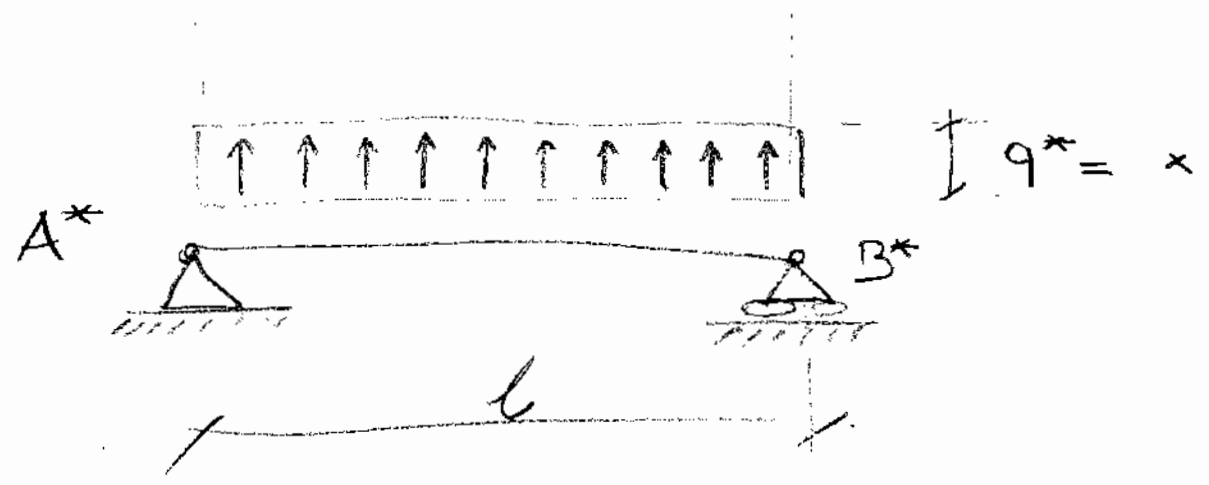


$\Pi(s) = -x$

Momento flettente

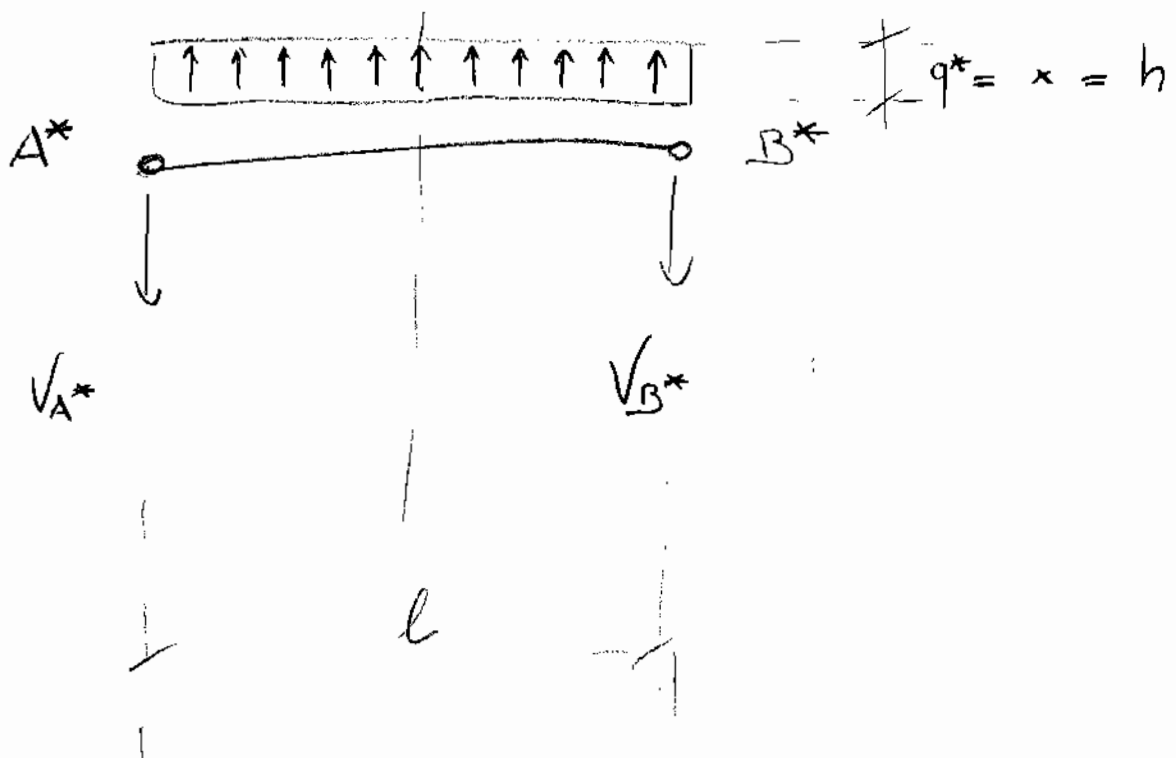


TRAVE AUSILIARIA



14

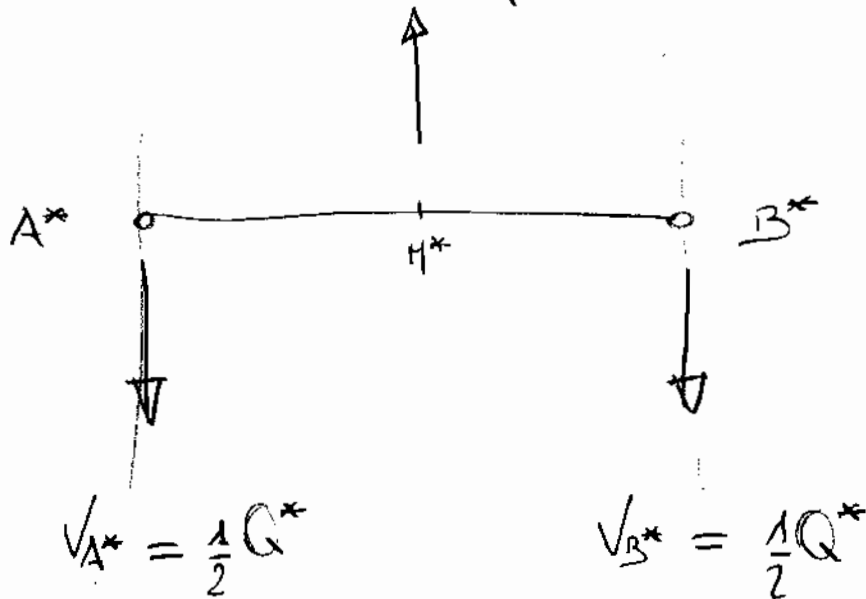
2



SCHEMA STATICO

secondo il carico ripartito q^* uniformemente distribuito lungo tutta la trave ausiliaria

$$Q^* = q^* \cdot l$$



$$V_{A^*} = \frac{1}{2} Q^*$$

$$V_{B^*} = \frac{1}{2} Q^*$$

$$V_{A^*} = V_{B^*} = \frac{1}{2} Q^* = \frac{1}{2} q^* \cdot l = \frac{1}{2} x \cdot l$$

$$V_A(x) = V_B(x) = \frac{V_{A^*}}{E \cdot J} = \frac{V_{B^*}}{E \cdot J} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} x \cdot l \right)$$

$$V_A(x) = V_B(x) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot l}{EJ}$$



EQUAZIONE DI CONGRUENZA :

$$V_A(q, x) = 0$$

$$V_B(q, x) = 0$$

$$V_A(q, x) = V_B(q, x) = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow me considero solo una delle due \Rightarrow

$$\Rightarrow V_A(q, x) = -V_A(q) + V_A(x) = 0$$

$$\Rightarrow -V_A(q) + V_A(x) = 0$$

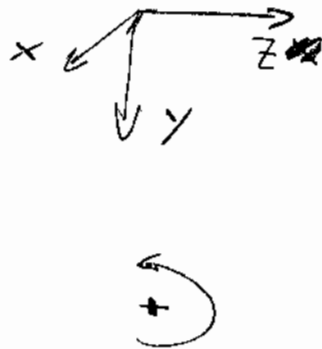
sostituendo i valori :

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{24} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot l}{EJ} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot l}{EJ} = \frac{1}{24} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{12} ql^2}$$

ANALISI ESTERNA

(1)



$$\text{lungo } y \rightarrow \begin{cases} \underline{F} - \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Mi serve una seconda equazione

$$\text{polo 1} \rightarrow -\underline{F} \cdot \left(\frac{3}{2}l\right) + \underline{V}_2 \cdot 2l = 0$$

$$\underline{V}_2 \cdot 2l = \underline{F} \cdot \left(\frac{3}{2}l\right)$$

$$\underline{V}_2 = \frac{3}{4} \underline{F}$$

Il mio sistema diventa

$$\begin{cases} \underline{F} - \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = 0 \\ \underline{V}_2 = \frac{3}{4} \underline{F} \end{cases}$$

TRAVATURA
RETICOLARE

$$\underline{F} - \underline{V}_1 - \frac{3}{4} \underline{F} = 0$$

$$\underline{V}_1 = \underline{F} - \frac{3}{4} \underline{F} = \frac{1}{4} \underline{F}$$

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{4} \underline{F}$$

ANALISI INTERNA

Generalmente, per l'analisi Interna dei Correnti (inferiori e superiori) conviene sfruttare i Momenti per determinare gli SFORZI NORMALI (agenti in direzione longitudinale ad ogni singola asta).

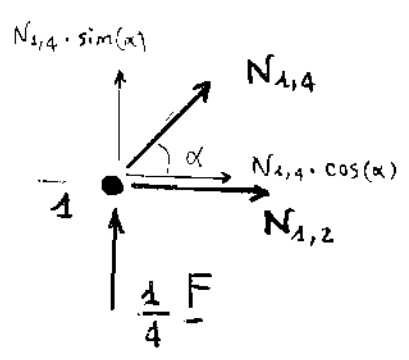
Applichiamo il METODO di RITTER tagliando la struttura in due parti complementari, analizzandone solo una delle due. Vediamo lo sforzo Normale tra 1 e 4, ossia $N_{1,4}$, che essendo diagonale si scompone in due componenti, verticale ed orizzontale ($N_{1,4}$ lo prendo convenzionalmente di Trazione) :

$$\text{lungo } y \rightarrow N_{1,4}(y) = N_{1,4} \cdot \sin(\alpha)$$

lungo z $\rightarrow N_{1,4}(z) = N_{1,4} \cdot \cos(\alpha)$

Equazione di equilibrio alla traslazione verticale del nodo 1

lungo y $\rightarrow -N_{1,4} \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{4} F = 0$



$-N_{1,4} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{4} F$

$-N_{1,4} = \frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}$

$N_{1,4} = -\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}$

l'asta 1-4 sarà compressa

Il segno negativo smentisce N1,4 di trazione, quindi sarà di compressione e quindi l'asta 1-4 sarà compressa.

Ora, vediamo lo sforzo Normale tra 1 e 2, ossia N1,2, che sceglieremo convenzionalmente di trazione per il nodo 1; l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale del nodo 1 sarà:

lungo z $\rightarrow N_{1,2} + N_{1,4} \cdot \cos(\alpha) = 0$

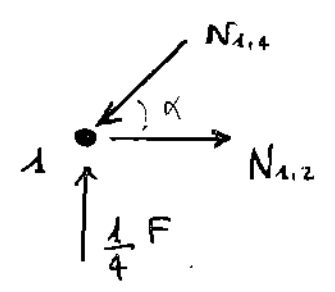
$N_{1,2} = -N_{1,4} \cdot \cos(\alpha)$

sostituendo il valore di N1,4 trovato prima, si ottiene:

$N_{1,2} = -\left(-\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}\right) \cdot \cos(\alpha) = +\frac{1}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Ma $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ è la funzione inversa della tangente, ossia la cotangente

$N_{1,2} = \frac{1}{4} \cdot F \cdot \cot(\alpha)$ l'asta 1-2 sarà tesa



Nel complesso il diagramma delle forze sarà:

Guardiamo il modo 2
lungo Z

(3)

$$-N_{2,4} \cdot \cos(\alpha) - N_{2,1} = 0$$

$$\cancel{N_{2,4}} \cdot \cos(\alpha) = -N_{2,1}$$

$$N_{2,4} \cdot \cos(\alpha) = -\left(-\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha)\right)$$

$$N_{2,4} \cdot \cos(\alpha) = +\frac{1}{4} F \cdot \frac{\cotg(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$N_{2,4} = +\frac{1}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} = +\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}$$

$$N_{1,2} = -N_{2,1} = \left(\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha)\right)$$

$$N_{2,1} = -\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha)$$

Equilibrio alla trasl. orizzontale:

$$\begin{cases} N_{1,2} + N_{4,2}(Z) + N_{4,5} = 0 & \left(\text{vedere lato } (-) \text{ della 2a sezione che} \right. \\ & \left. \text{prende modo 1 e 4} \right) \\ N_{4,2}(Z) = N_{4,2} \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale:

$$N_{4,2}(Y) - \frac{1}{4} F = 0 \quad \text{con } N_{4,2}(Y) = N_{4,2} \cdot \sin(\alpha)$$

$$N_{4,2} \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{4} F = 0$$

$$N_{4,2} \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{4} F$$

$$N_{4,2} = \frac{F}{4 \sin(\alpha)} \quad \left| \text{di trazione} \right.$$

Equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale :

$$N_{1,2} + N_{4,2} \cdot \cos(\alpha) + N_{4,5} = 0$$

$$N_{4,5} = -N_{1,2} - N_{4,2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{4,5} = -\left(\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha)\right) - \left(\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{4,5} = -\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha) - \frac{1}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{4,5} = -\frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha) - \frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha) = -\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha)$$

$$N_{4,5} = -\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) \quad \Bigg| = -\frac{1}{4} F \cdot \frac{l}{h} \quad \underline{\text{PUNTONE}}$$

$$\cotg(\alpha) = \frac{l/2}{h} = \frac{l}{2h}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{l}{2}$$

$$\sin(\alpha) = h$$

Per verifica, calcoliamo $N_{1,2}$ con l'equazione di equilibrio alla rotazione :

$$\text{polo 4} \rightarrow \frac{1}{4} F \cdot \left(\frac{l}{2}\right) - N_{1,2} \cdot (h) = 0$$

$$N_{1,2} \cdot h = F/4 \cdot l/2 \Rightarrow N_{1,2} = \frac{F/4 \cdot l/2}{h}$$

$$N_{1,2} = F/4 \cdot \frac{l/2}{h} = \frac{F}{4} \cdot \cotg(\alpha) \quad \underline{\text{TRANTE}}$$

dove

$$\cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{l/2}{h}$$

3a SEZIONE :

(5)

Equazioni di equilibrio alla Traslazione
continuiamo a considerare $N_{4,5}$ per convenzione, di trazione

$$\text{lungo } z \rightarrow +N_{4,5} + N_{2,5} \cdot \cos(\alpha) + N_{2,3} = 0$$

$$\text{lungo } y \rightarrow -F/4 - N_{2,5} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$N_{2,5} \cdot \sin(\alpha) = -F/4$$

$$N_{2,5} = -\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}$$

~~l'~~ l'asta 2-5
sarà compressa -
PUNTONE

sostituendo :

$$+N_{4,5} + N_{2,5} \cdot \cos(\alpha) + N_{2,3} = 0$$

$$N_{2,3} = -N_{4,5} - N_{2,5} \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{2,3} = -\left(-\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha)\right) - \left(-\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{2,3} = +\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) + \frac{1}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{2,3} = +\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) + \frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha) = +\frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha)$$

$$N_{2,3} = \frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha)$$

l'asta 2-3 sarà Tesa
TIRANTE

$\uparrow N_{4,5}$

$\rightarrow N_{2,3}$

$\downarrow N_{2,5}$

$N_{2,5} \text{ cord}$

$-N_{4,5} + N_{2,5} \text{ cord}$

$$N_{4,5} + N_{2,5} \text{ cord} + N_{2,3} = 0 \Rightarrow N_{2,3} = -(N_{4,5}) + -(N_{2,5} \text{ cord})$$

$$N_{2,3} = -\left(-\frac{F}{2} \cotg(\alpha)\right) - \left(-\frac{F}{4} \frac{\text{cord}}{\text{cord}}\right) = \frac{3}{4} F \cotg(\alpha) =$$

$$-N_{5,4} - N_{5,2} \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N_{5,2} \cdot \cos(\alpha) = -N_{5,4}$$

$$N_{5,2} \cdot \cos(\alpha) = -\left(+\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha)\right) \Rightarrow N_{5,2} = -\frac{1}{2} F$$

$$\text{con } N_{4,5} = -N_{5,4} = -\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) \rightarrow N_{5,4} = +\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha)$$

Equazione di equilibrio alla Traslazione orizzontale :

$$\text{lungo } Z : -N_{5,4} - N_{5,2} \cdot \cos(\alpha) - N_{3,2} = 0$$

dove tutti gli sforzi sono stati presi convenzionalmente di TRAZIONE.
Di quest'equazione conosciamo solo $N_{5,4}$, che dovendo rispettare la convenzione di TRAZIONE, conserva il segno negativo, derivante dal risultato di $N_{4,5}$, ossia :

$$N_{5,4} = -\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) \quad \text{L'ASTA 5-4 sarà compressa PUNTONE}$$

mentre gli altri due sforzi, sono incogniti. -

Scriviamo ora, l'equazione di equilibrio alle Trasl. verticale :

$$\text{lungo } Y : F + N_{5,2} \cdot \sin(\alpha) - \frac{3}{4} F = 0$$

$$N_{5,2} \cdot \sin(\alpha) = \frac{3}{4} F - F$$

$$N_{5,2} = -\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)} \quad \text{L'ASTA 5-2 sarà compressa. PUNTONE}$$

$$\text{lungo } Z : -N_{5,4} - N_{5,2} \cdot \cos(\alpha) - N_{3,2} = 0$$

$$N_{3,2} = -N_{5,4} - N_{5,2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{3,2} = -\left(-\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha)\right) - \left(-\frac{F}{4 \cdot \sin(\alpha)}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{3,2} = +\frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) + \frac{1}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{3,2} = \frac{1}{2} F \cdot \cotg(\alpha) + \frac{1}{4} F \cotg(\alpha) = \frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha)$$

$$N_{3,2} = \frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha) \quad \text{L'asta 3-2 sarà Tesa TIRANTE}$$

Equazione di equilibrio alla trasl. orizzontale :

$$\text{lungo } Z \Rightarrow + N_{5,3} \cdot \cos(\alpha) + N_{2,3} = 0$$

dove tutti gli sforzi sono stati presi convenzionalmente di TRAZIONE.
Di quest'equazione conosciamo $N_{2,3}$ che dovendo rispettare la convenzione di trazione, conserva il segno positivo derivante dal risultato di $N_{2,3}$ precedente :

$$N_{5,3} \cdot \cos(\alpha) = - N_{2,3}$$

$$N_{5,3} \cdot \cos(\alpha) = - \frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha) = - \frac{3}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{5,3} = - \frac{3}{4} \frac{F}{\sin(\alpha)}$$

l'asta 5-3 sarà compressa
PUNTO

Equazione di equilibrio alla trasl. verticale :

$$\text{lungo } Y \Rightarrow + F - \frac{F}{4} + N_{5,3} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$N_{5,3} \cdot \sin(\alpha) = \frac{F}{4} - F = - \frac{3}{4} F$$

$$N_{5,3} = - \frac{3}{4} \frac{F}{\sin(\alpha)}$$

4^a SEZIONE : lato (+), verifica

(8)

Abbiamo solo ~~in~~ il nodo 3 in questione ;
equazione di equilibrio alle trasl. orizzontale :

$$\text{lungo } z \rightarrow -N_{3,5} \cdot \cos(\alpha) - N_{3,2} = 0$$

dove tutti gli sforzi ~~sono~~ sono stati presi convenzionalmente di TRAZIONE
di quest'equazione conosciamo $N_{3,2}$ che dovremo rispettare
la convenzione, conserva il segno positivo derivante dal
risultato di $N_{2,3}$, calcolato in precedenza :

$$N_{2,3} = \frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha) = N_{3,2}$$

$$N_{3,5} \cdot \cos(\alpha) = -N_{3,2} = -\frac{3}{4} F \cdot \cotg(\alpha) = -\frac{3}{4} F \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{3,5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{F}{\sin(\alpha)}$$

l'asta 3-5 sarà compressa
PUNTO

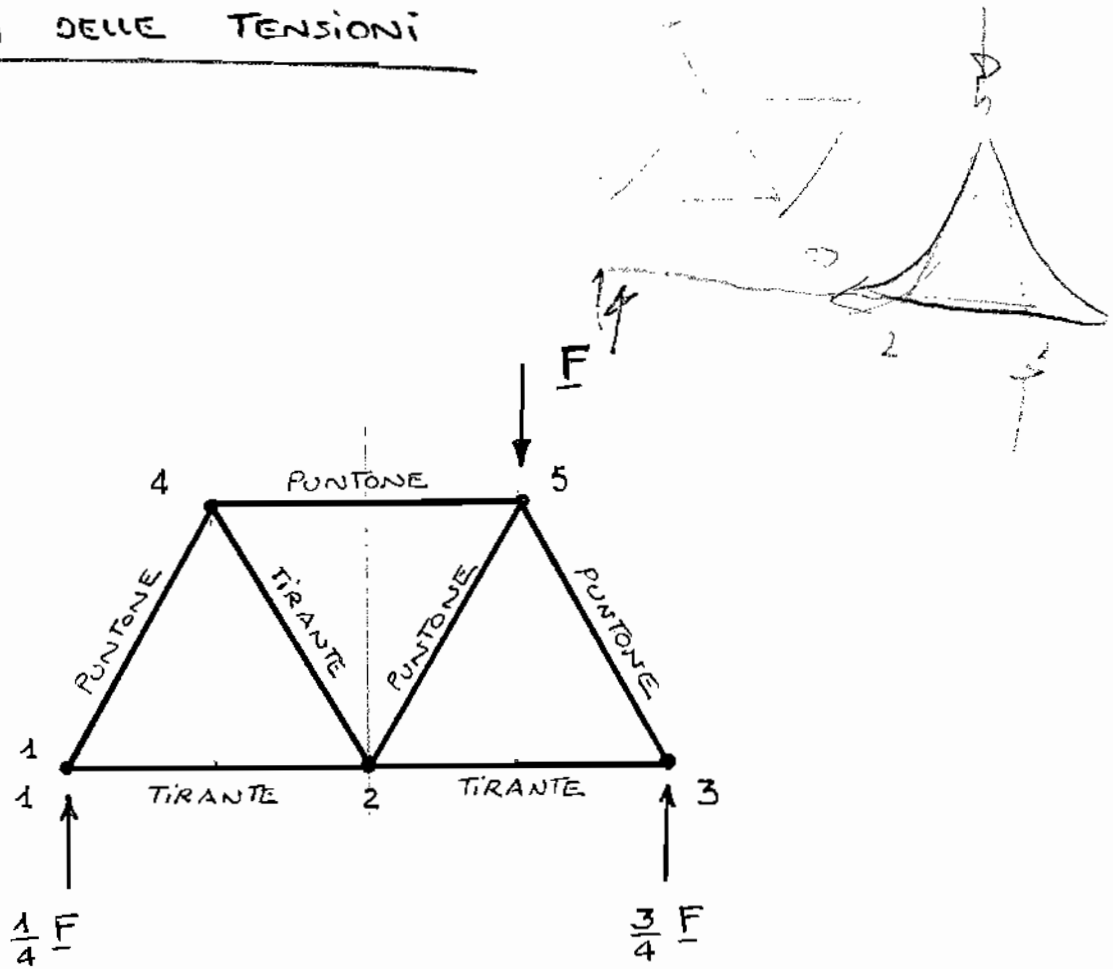
Equazione di equilibrio alle trasl. verticale :

$$\text{lungo } y \Rightarrow -N_{3,5} \cdot \sin(\alpha) - \frac{3}{4} F = 0$$

$$N_{3,5} \cdot \sin(\alpha) = -\frac{3}{4} F$$

$$N_{3,5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{F}{\sin(\alpha)}$$

DIAGRAMMA DELLE TENSIONI



TIRANTE \Rightarrow l'asta è tesa, ossia in trazione;

PUNTORE \Rightarrow l'asta è compressa, ossia è in compressione;

1° TAGLIO : lato \oplus , verifica

Equilibrio alla traslazione orizzontale :

$$\text{LUNGO } Z \Rightarrow -N_{4,1} \cdot \cos(\alpha) - N_{2,1} = 0$$

Abbiamo un'equazione in due incognite , quindi non risolvibile ; necessita di una seconda equazione da mettere a sistema e pertanto scriviamo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale :

$$\text{LUNGO } Y \Rightarrow +N_{4,1} \cdot \sin(\alpha) + \underline{F} - \frac{3}{4}\underline{F} = 0$$

Abbiamo un'equazione in un'incognita , ossia $N_{4,1}$:

$$N_{4,1} \cdot \sin(\alpha) = +\frac{3}{4}\underline{F} - \underline{F} = -\frac{1}{4}\underline{F}$$

$$\boxed{N_{4,1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\underline{F}}{\sin(\alpha)}} \quad \text{L'ASTA 4-1 SARÀ COMPRESSA}$$

PUNTO

Il segno negativo smentisce l'aver scelto convenzionalmente di trazione lo sforzo Normale $N_{4,1}$, che pertanto sarà di compressione -

Sostituendo nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale , si ottiene :

$$-N_{4,1} \cdot \cos(\alpha) - N_{2,1} = 0$$

$$N_{2,1} = -N_{4,1} \cdot \cos(\alpha) = -\left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{\underline{F}}{\sin(\alpha)}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_{2,1} = +\frac{1}{4}\underline{F} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{4}\underline{F} \cdot \cotg(\alpha)$$

$$\boxed{N_{2,1} = \frac{1}{4}\underline{F} \cdot \cotg(\alpha)} \quad \text{L'ASTA 2-1 SARÀ TESA}$$

TIRANTE

Il segno positivo del risultato , conferma l'aver scelto convenzionalmente di trazione lo sforzo Normale $N_{2,1}$ -

Equazione di equilibrio dei momenti alla rotazione :

$$\text{Polo 4} \Rightarrow -F \cdot (l) + \frac{3}{4} F \cdot \left(\frac{3}{2} l\right) - N_{2,1} \cdot (h) = 0$$

Abbiamo un'equazione in un'incognita :

$$N_{2,1} \cdot (h) = + \frac{3}{4} F \cdot \left(\frac{3}{2} l\right) - F \cdot (l) = \frac{9}{8} F \cdot l - F \cdot l = \frac{1}{8} F \cdot l$$

$$N_{2,1} \cdot (h) = \frac{1}{8} F \cdot l \quad \Rightarrow \quad N_{2,1} = \frac{1}{8} F \cdot \frac{l}{h} = \frac{1}{4} F \cdot \frac{l}{2h}$$

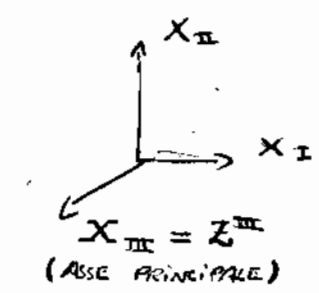
$$\text{ma} \quad \frac{l}{2h} = \frac{2l}{h} = \cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

quindi

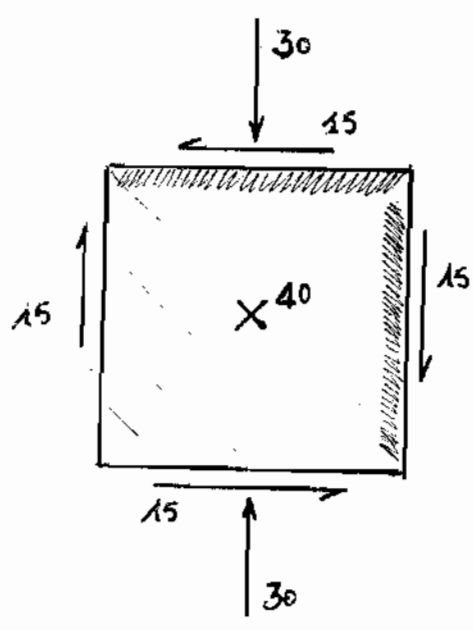
$$N_{2,1} = + \frac{1}{4} F \cdot \cotg(\alpha)$$

LA STA 2-1 SARA' TESA
TIRANTE

1° ESERCIZIO



$\sigma_{II} = -30$
 $\sigma_I = 0$



La tensione Principale di modulo 40 è entrante nel piano delle pagine che è un PIANO PRINCIPALE ($\tau = 0$)

In particolare, per il sistema di riferimento dato

$S_{III} = -40$;
 quindi ci rimane da determinare S_I ed S_{II}

CONVENZIONE DI MOHR: $\curvearrowright +$

La componente Tangenziale τ sul piano rosso da una rotazione antioraria, quindi un valore negativo per le τ orizzontali; mentre la componente Tangenziale τ sul piano verde da una rotazione oraria, quindi un valore positivo per le τ verticali;

Notiamo che, $\sigma_{II} = -30$ e $S_{III} = -40$ sono negativi in quanto sono compressioni; in particolare σ_{II} è la componente normale di uno sforzo di compressione, mentre S_{III} è la TENSIONE PRINCIPALE, ossia la componente normale di compressione al piano principale (piano delle pagine) -

Per trovare il centro:

$$C = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = \frac{\sigma_{II}}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

quindi $C = (-15; 0)$

Per trovare il Raggio consideriamo il triangolo rettangolo $H'CH$

$H'C = -15$
 $HH' = -15$ } quindi $R = 21,21$

essendo due lati di un quadrato, la sua diagonale (ossia nel nostro caso coincide con il raggio) è $R = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot 15 = 21,21$

2

COORDINATE di A e di B

ascissa (A) = ascissa (C) - R = -15 + 21,21 = -36,21

$A = (-36,21 ; 0)$

ascissa (B) = ascissa (C) + R = +6,21

$B = (+6,21 ; 0)$

TENSIONI PRINCIPALI S_I e S_{II}

$S_I = \sigma_{medio} + R =$

dove S_I è sempre il valore più grande, quello positivo ;
mentre σ_{medio} è il valore medio tra $\sigma_{II} = -30$
e $\sigma_I = 0$, ossia $\sigma_m = -15$;

quindi :

$S_I = -15 + 21,21 = +6,21$

$S_I = +6,21$

mentre :

$S_{II} = \sigma_m - R = -15 - 21,21 = -36,21$

$S_{II} = -36,21$

DEF. 2γ

è l'inclinazione del raggio R rispetto all'ascissa e si trova :

$\tau = R \cdot \sin(2\gamma)$

$\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2} = R \cdot \cos(2\gamma) \Rightarrow \frac{\sigma_{II}}{2} = R \cdot \cos(2\gamma) \Rightarrow 2\gamma = \arccos\left(\frac{-30}{2 \cdot 21,21}\right) = 135^\circ$

quindi $2\gamma = 135^\circ$ che per rotazione oraria dà $-2\gamma = 135^\circ$

DEF. $-\gamma$

è l'inclinazione del PIANO PRINCIPALE su cui agisce la TENSIONE PRINCIPALE maggiore S_I rispetto al piano PH rosso :

$2\gamma = 135^\circ \Rightarrow \gamma = 67,5^\circ \Rightarrow +\gamma = 67,5^\circ$

da prendere in rotazione antioraria.

il valore della TENSIONE PRINCIPALE $S_{III} = -40$ seive
a determinare, insieme ad S_I ed S_{II} , l'ARBELO di MOHR
poi conosco le coordinate dell' estremo A, ossia

$$A = (-36,21 ; 0) ;$$

disegniamo il valore S_{III} sull' asse ed otteniamo
un' altro cerchio di estremi D e A

coordinate $D = (-40 ; 0)$

$$A = (-36,21 ; 0)$$

quindi il diametro del cerchio piccolo e' ~~DA~~

$$DA = (-36,21) - (-40) = 3,79$$

da cui $r = \frac{3,79}{2} = 1,895$ $r = 1,895$

Quindi il suo CENTRO C' e' il valore medio
fra D e A, ossia:

$$C' = \frac{D+A}{2} = \frac{-40 - 36}{2} = -38$$

ossia $C' = (-38 ; 0)$

CENTRO DEL CERCHIO MASSIMO

Ora che conosciamo i due cerchi interni, il
cerchio massimo avra' come centro C'' il
valore medio fra D e B, ossia:

$$C'' = \frac{D+B}{2} = \frac{-40 + 6}{2} = -17$$

$C'' = (-17 ; 0)$

RAGGIO ARBELO $\Rightarrow R_a = B - C'' = (+6) - (-17) = +6 + 17 = +23$

$R_a = 23$

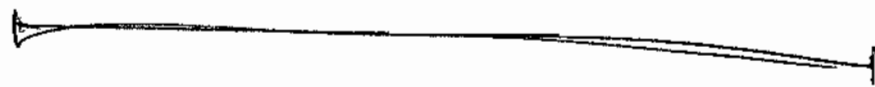
MATRICE di TENSIONE o di CAUCHY :

4

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 0 \\ -15 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{II} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

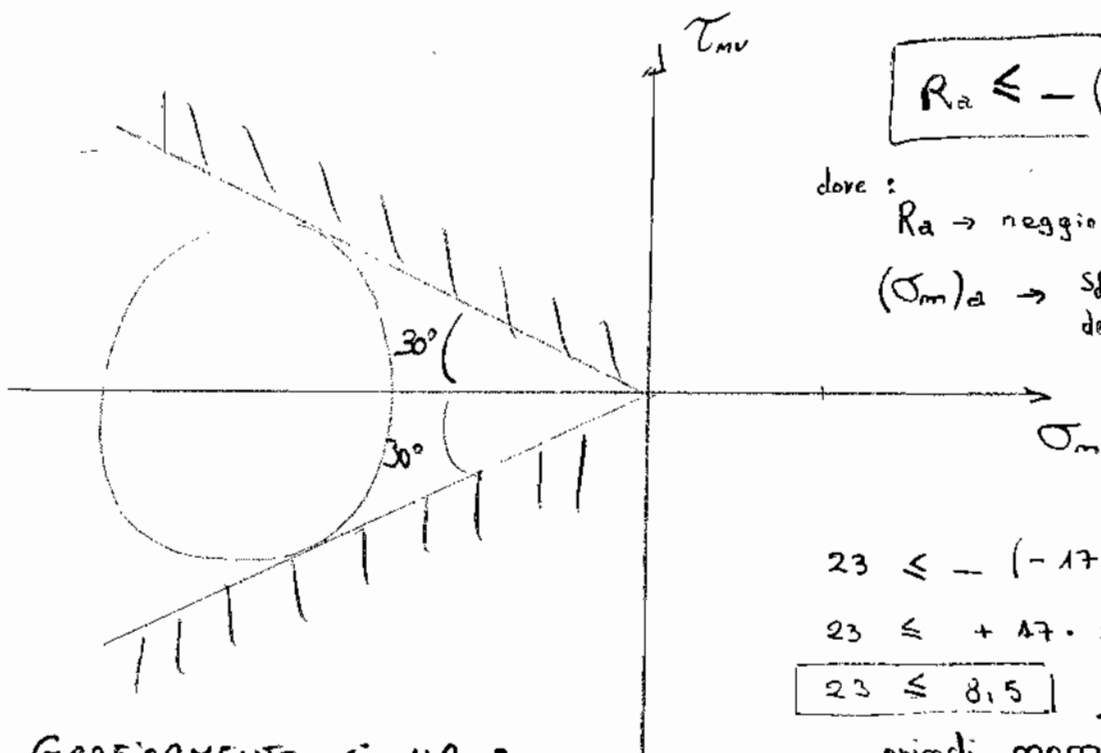
Labels for the matrix components:
 -15: piano verticale
 -30: piano orizz
 -40: piano frontale

ogni colonna della Matrice di Cauchy rappresenta un piano del cubetto;



CRITERIO di MOHR - COULOMB :

$\psi = 30^\circ \rightarrow$ Inclinazione Limite o Angolo di Attrito Interno.



$$R_a \leq -(\sigma_m)_a \cdot \sin(\psi)$$

dove :
 $R_a \rightarrow$ neggio Anbela = 23
 $(\sigma_m)_a \rightarrow$ Sforzo normale medio dell'Anbela = $C'' = -17$

$$23 \leq -(-17) \cdot \sin(30)$$

$$23 \leq +17 \cdot \sin(30)$$

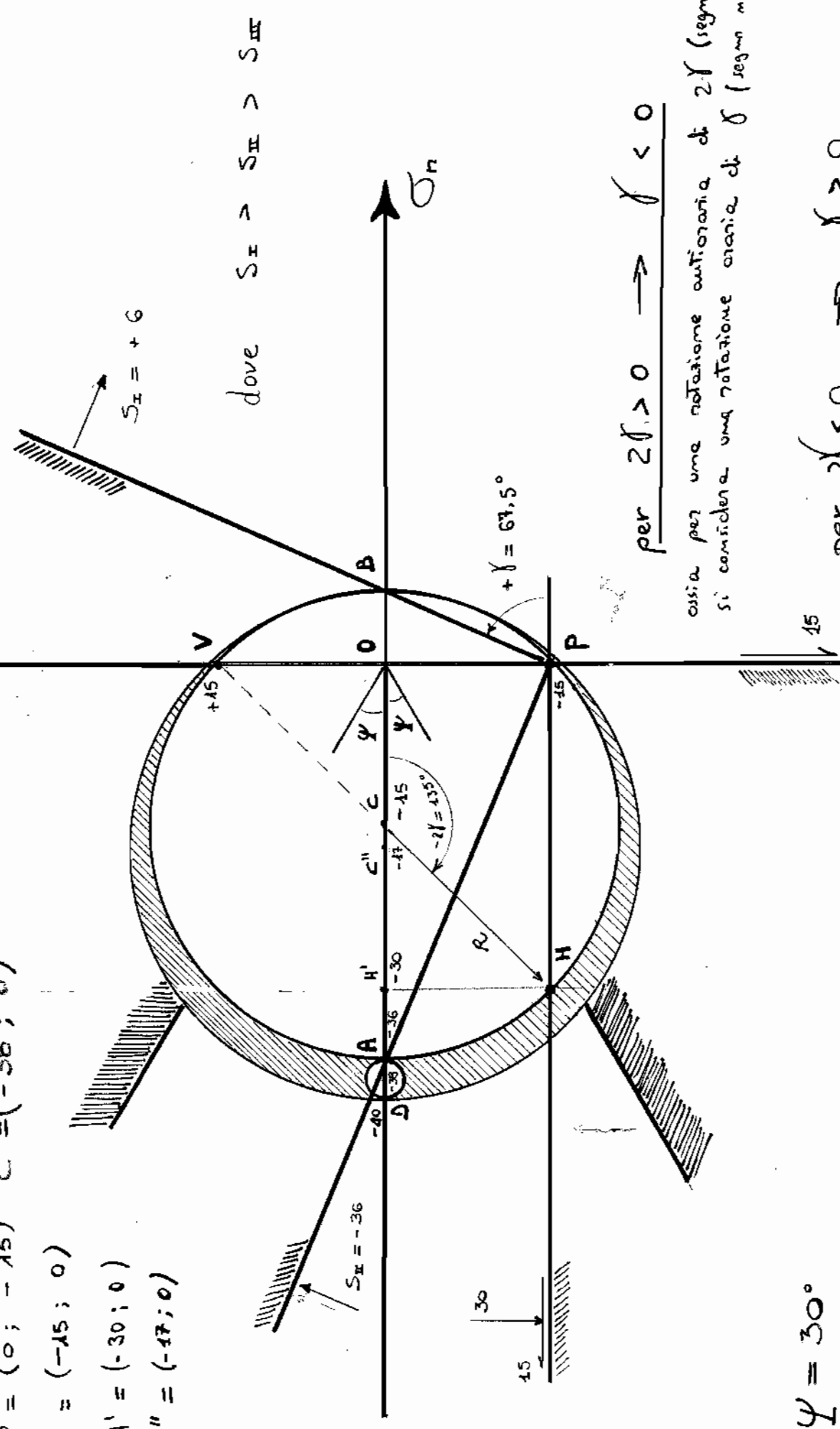
$$23 \leq 8,5 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

quindi non resiste -

GRAFICAMENTE si HA :

Nel nostro caso, il cerchio Massimo mom è compreso tra le due rette del Piano di Mohr (zona interme alle due rette inclinate di 30°) pertanto il provino (sabbia) non può resistere allo stato tensionale di compressione a cui il provino è sottoposto.

- $V = (0; +15)$
- $A = (-36; 0)$
- $H = (-30; -15)$
- $S = (+6; 0)$
- $P = (0; -15)$
- $C' = (-38; 0)$
- $C = (-15; 0)$
- $H' = (-30; 0)$
- $C'' = (-17; 0)$



dove $S_I > S_{II} > S_{III}$

per $2\gamma > 0 \rightarrow \gamma < 0$

ossia per una rotazione antioraria di 2γ (segno positivo)
 si considera una rotazione oraria di γ (segno negativo)

per $2\gamma < 0 \rightarrow \gamma > 0$

ossia, per una rotazione oraria di 2γ (segno negativo),
 si considera una rotazione antioraria di γ (segno positivo)
 come appunto in questo caso -

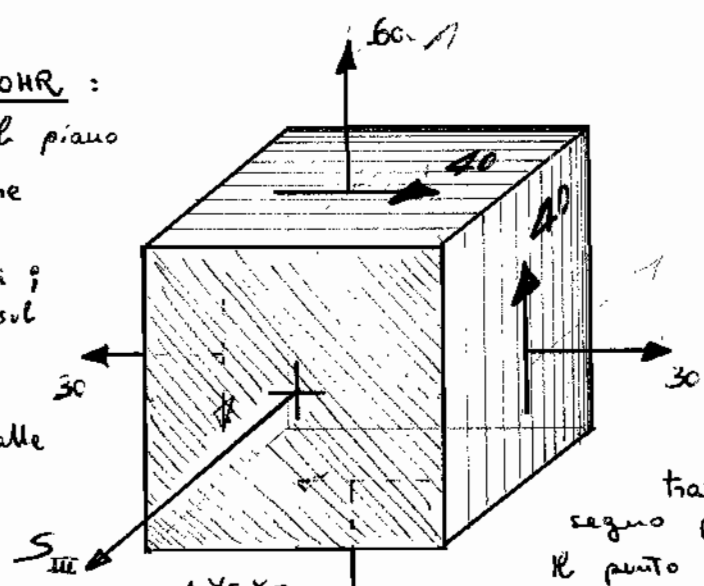
$\psi = 30^\circ$
 angolo per la verifica di resistenza attraverso
 criterio di MOHR-COULOMB, per provini costituiti
 da materiale tipo sabbia, argille -

ESERCIZIO | Cerchio di Mohr

Supponiamo di tagliare un cubetto di materiale in il piano della pagina e il nostro elemento Piano Principale ($\tau = 0$) di Tensione Principale S_3 .

Per CONVENZIONE DI MOHR:

la componente τ sul piano rosso da una rotazione oraria, quindi valore positivo alle τ orizzontali; mentre la componente τ sul piano verde da una rotazione antioraria, quindi valore negativo alle verticali;



$$\tau = 40 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = 60 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_I = 30 \text{ N/mm}^2$$

Notiamo che:

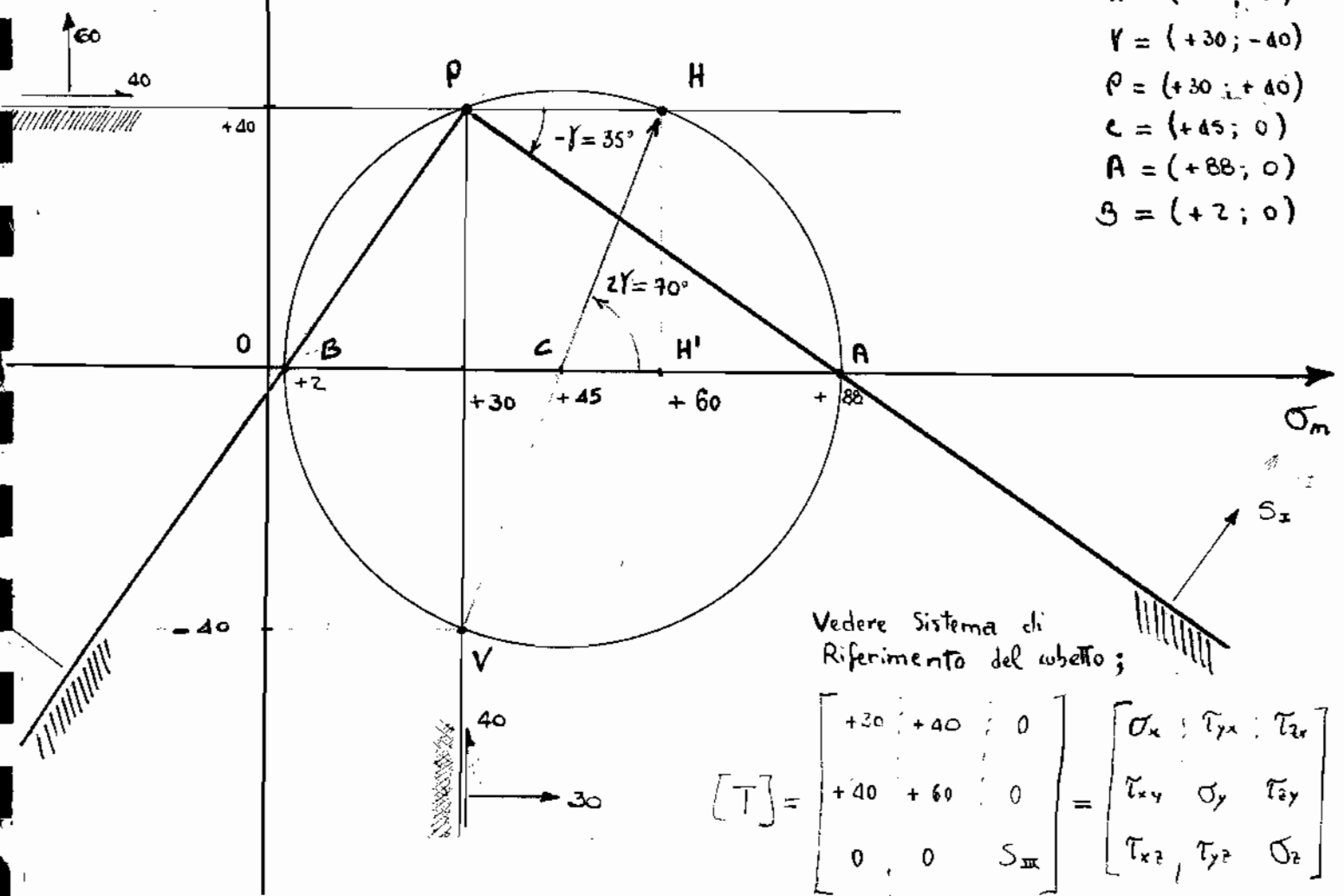
le componenti σ_I e σ_{II} normali al piano rosso e verde, sono entrambe di trazione e quindi danno un segno positivo sull'ascissa.

Il punto H si prende sempre per il piano orizzontale, mentre V si prende per il piano verticale verde. P è il polo di rappresentazione.

τ_{mv}

$Y = X_{II}$
 $X = X_I$
 $Z = Z_{III} = X_{III}$
 (ASSE PRINCIPALE)

- H = (+60; +40)
- H' = (+60; 0)
- V = (+30; -40)
- P = (+30; +40)
- C = (+45; 0)
- A = (+88; 0)
- B = (+2; 0)



Vedere Sistema di Riferimento del cubetto;

$$[T] = \begin{bmatrix} +30 & +40 & 0 \\ +40 & +60 & 0 \\ 0 & 0 & S_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{per l'ascissa, essendo l'ordinata sempre zero;}$$

$$C = \frac{60 + 30}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ millimetri}$$

Per trovare il Raggio del Cerchio (il cui diametro è \sqrt{H}), consideriamo la proiezione di H sull'ascissa, ossia il punto H' di coordinate (+60; 0) ed il Centro $C = (+45; 0)$; consideriamo quindi il triangolo rettangolo CHH' di cui conosciamo il cateto maggiore $HH' = +40 \text{ mm}$ ed il cateto minore ~~CH~~, ossia:

$$CH' = (+60) - (+45) = +15 \text{ mm}$$

L'ipotenusa di tale triangolo, è il raggio del Cerchio e lo determiniamo attraverso:

TEOREMA DI PITAGORA:

$$CH = \sqrt{(CH')^2 + (HH')^2}$$

$$R = \sqrt{(15)^2 + (40)^2} = 42,72 \text{ mm}$$

ossia

$$R = 42,72 \text{ mm}$$

Determiniamo ora le coordinate di A e B, ossia gli estremi del cerchio sull'ascissa, che hanno ordinate sempre nulle;

$$\text{ascissa (A)} = \text{ascissa (C)} + R = +45 + 42,72 = +87,72 \text{ mm}$$

coordinate di $A = (87,72; 0)$

mentre:

$$\text{ascissa (B)} = \text{ascissa (C)} - R = +45 - 42,72 = 2,28 \text{ mm}$$

coordinate di $B = (2,28; 0)$

Tra P ed A e tra P e B passeranno i due Piani Principali ; su Tali piani agiranno le Tensioni Principali S_1 e S_2 dove S_1 è espressa in N/mm^2 ed è data :

$$S_1 = S_{medio} + R = 45 + 42,72 = 87,72 \text{ N/mm}^2$$

$$S_1 = 87,72 \text{ N/mm}^2 \approx 88 \text{ N/mm}^2$$

mentre :

$$S_2 = S_{medio} - R = 45 - 42,72 = 2,28 \text{ N/mm}^2$$

$$S_2 = 2,28 \text{ N/mm}^2 \approx 2 \text{ N/mm}^2$$

DEF. 2γ :

è l'inclinazione del piano CH rispetto all'orizzontale (ascissa) ;

DEF. γ

è l'inclinazione del Piano PRINCIPALE su cui agisce la Tensione maggiore S_1 rispetto al piano PH ;

per trovare l'angolo (2γ) applichiamo una delle 2 formule :

$$\tau = R \cdot \sin(2\gamma)$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = R \cdot \cos(2\gamma)$$

da cui

$$\tau = R \cdot \sin(2\gamma) \Rightarrow \sin(2\gamma) = \frac{\tau}{R}$$

inversa :

$$2\gamma = \arcsin\left(\frac{\tau}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{40}{42,72}\right) = 69,44^\circ$$

$$2\gamma = 70^\circ$$

da cui :

$$\gamma = \frac{2\gamma}{2} = \frac{69.44}{2} = 34.72$$

e quindi

$$\boxed{-\gamma = 35^\circ}$$



Se non viene fornito il valore della TENSIONE PRINCIPALE S_{III} , allora non è possibile individuare l'ARBELO di MOHR, o meglio il cerchio che noi abbiamo è il CERCHIO MASSIMO ed A e B sono rispettivamente, l'estremo massimo (per il quale passa la TENSIONE PRINCIPALE S_I MASSIMA) e l'estremo minimo (per il quale passa la TENSIONE PRINCIPALE S_{II} MINIMA) -

TROVIAMO S_{III} :

invarianti scalari

$$\text{Eq. di LAPLACE: } S_{III} - T_1 S_{II} + T_2 S_I - T_3 = 0$$

tensioni principali

di cui:

$$T_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} \sigma_I & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{II} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_I & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{III} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{II} & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_{III} \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

dalla matrice di Cauchy

$$[T] = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 0 \\ 40 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & S_{III} \end{bmatrix}$$

Mei nostro esercizio:

$$T_1 = 30 + 60 + S_{III} = S_{III} + 90$$

$$T_2 = (1800 - 1600) + (30 \cdot S_{III}) + (60 \cdot S_{III}) = 200 + 90 S_{III}$$

$$T_3 = 1800 S_{III}$$

FORMULE

$$\left. \begin{aligned} S_I &= 87,72 \\ S_{II} &= 2,28 \end{aligned} \right\} \text{ricavati dal problema}$$

Ora che abbiamo tutti i parametri, andiamo a sostituire nella eq. di Laplace:

$$S_{III} - \underbrace{(S_{III} + 90)}_{T_1} \cdot \underbrace{2,28}_{S_{II}} + \underbrace{(200 + 90 S_{III})}_{T_2} \cdot \underbrace{87,72}_{S_I} - \underbrace{1800 S_{III}}_{T_3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{III} - 2,28 S_{III} - 205,2 + 17544 + 7894,8 S_{III} - 1800 S_{III} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6093,52 S_{III} = -17338,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{III} = -2,85}$$

Risultato che rispetta la proporzione $S_I > S_{II} > S_{III}$

Grande per te
fu amico.

Love

ESERCIZIO

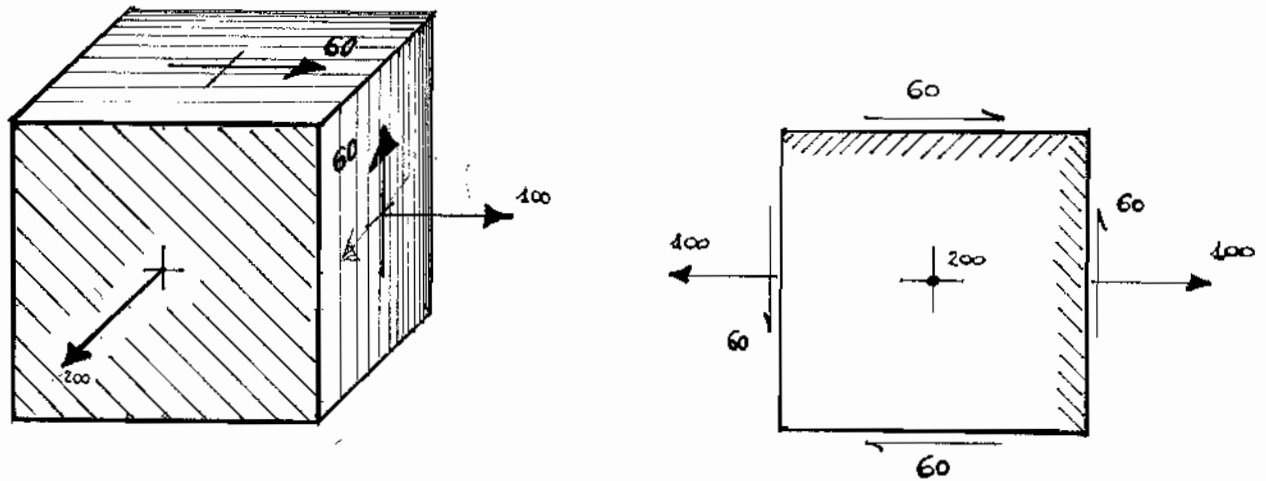
Cerchio di Mohr ; della 9^a LEZIONE

1

Premiamo un provino d'acciaio con tensione di snervamento

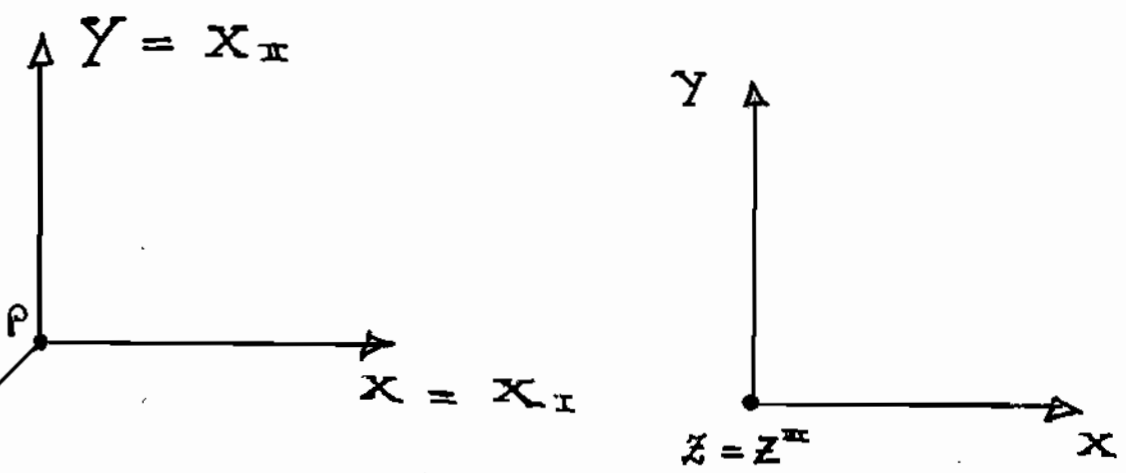
$$\sigma_y = 240 \text{ N/mm}^2 -$$

Devo stabilire se è in grado di resistere a tale stato di tensione :



Consideriamo come riferimento cartesiano la terna di assi PX, Y, Z , in cui il terzo asse è un ASSE PRINCIPALE Z^{III} (lungo il quale scorre la Tensione Principale $\sigma_{\text{III}} = 200$) ossia :

Nella Matrice di Tensione o di Cauchy si prendono i segni relativi a questo sistema di riferimento cartesiano; ricordiamo che il 1° pedice indica l'ortogonalità ad un asse, mentre il 2° pedice indica parallelismo ad un asse;



La Matrice di Tensione o di Cauchy è :

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +100 & +60 & 0 \\ +60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +200 \end{bmatrix}$$

piano verde
rosso
principale

(2)

CONVENZIONE DI MOHR



per rotazioni orarie
degli sforzi tangenziali,
segno positivo.

Come possiamo notare dai grafici la TENSIONE PRINCIPALE

$\sigma_{III} = 200 \text{ N/mm}^2$ è uscente dal piano delle
pagine, quindi è uno sforzo di trazione concorde con
l'ASSE PRINCIPALE $Z = Z^{III}$ e pertanto assume segno positivo;
noi dobbiamo determinare gli altri due PIANI PRINCIPALI sui quali
agiscono le rispettive TENSIONI PRINCIPALI σ_I ed σ_{II} .

Poi notiamo che, lo sforzo normale che agisce sul piano
verde è di trazione ~~concordanza~~ concorde con l'asse X ,
pertanto assume segno positivo:

$$\sigma_x = +100 \text{ N/mm}^2$$

mentre sul piano rosso non ci sono sforzi normali,
pertanto:

$$\sigma_y = 0$$

Infine abbiamo gli sforzi tangenziali:

sul piano verde, abbiamo una componente tangenziale τ
che per la CONVENZIONE DI MOHR, dà una rotazione antioraria
quindi un segno negativo sull'ordinata;

mentre la componente tangenziale τ sul piano rosso, dà una
rotazione oraria; quindi un segno positivo sull'ordinata;

Ricordiamo che il punto H si identifica sul piano rosso
mentre V sul piano verde;

poi P che è il polo di rappresentazione e l'intersezione
dei due piani.

$$H = (0; +60) \text{ N/mm}^2$$

$$V = (+100; -60) \text{ N/mm}^2$$

per H facciamo passare il piano orizzontale rosso;
mentre per V facciamo passare il piano verticale verde;

$$C = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{I}}{2} \quad (\text{semisomma delle Tensioni normali})$$

dove: $\sigma_{II} = \sigma_y = 0$

ossia sul piano superiore (rosso) ed inferiore, non agiscono sforzi normali.

$$\sigma_{I} = \sigma_x = +100$$

ci sono sforzi normali sulle facce verticali laterali (verde);

perciò:

$$C = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{I}}{2} = \frac{\sigma_{II}}{2} = \frac{\sigma_x}{2} = + \frac{100}{2} = + 50 \text{ N/mm}^2$$

ossia

$$C = (+ 50; 0) \text{ N/mm}^2$$

il centro si trova sempre sull'asse delle ascisse σ_n (potrebbe coincidere con l'origine).

RAGGIO :

Per trovare il Raggio del cerchio, consideriamo il triangolo rettangolo $V C V'$, di cui conosciamo già il cateto maggiore:

$$\overline{V V'} = (+100; -60) - (+100; 0) = (100 - 100; -60) = (0; -60)$$

quindi $\overline{V V'} = -60$ CATETO MAGGIORE

e conosciamo anche il cateto minore:

$$\overline{V' C} = (+100; 0) - (+50; 0) = (+100 - 50; 0) = (+50; 0)$$

quindi $\overline{V' C} = +50$ CATETO MINORE

Ora, attraverso il TEOREMA di PITAGORA si trova il raggio:

$$R = \sqrt{(V V')^2 + (V' C)^2} = \sqrt{(-60)^2 + (+50)^2} = 78,1$$

ossia $R = 78,1 \text{ N/mm}^2$

4

Il Polo di Rappresentazione P si determina attraverso l'intersezione del piano orizzontale (rosso) passante per H con il piano verticale (verde) passante per V ; pertanto graficamente, si deduce che le coordinate sono :

$$P = (+100 ; +60) \text{ N/mm}^2$$

COORDINATE di A e B :

$$\text{ascissa (A)} = \text{ascissa (C)} + R = +50 + 78,1 \cong +128$$

$$\text{ordinate (A)} = 0$$

quindi

$$A = (+128,1 ; 0) \text{ N/mm}^2$$

$$\text{ascissa (B)} = \text{ascissa (C)} - R = +50 - 78,1 \cong -28$$

$$\text{ordinate (B)} = 0$$

$$B = (-28 ; 0) \text{ N/mm}^2$$

Pertanto per A passerà la Tensione Principale massima ~~che, siccome viene fornita~~ (tra i due valori del nostro cerchio) e per B quella minima ;

ATTENZIONE

Il cerchio compreso tra A e B non è il cerchio massimo, ma è uno dei due cerchi interni all'Arbello di Mohr che ha come Tensione Principale minima ~~quella~~ passante per B e come Tensione Principale massima, quella fornita dal problema, ossia $\sigma_{III} = 200$;

TENSIONI PRINCIPALI S_I e S_{II} : con $S_I \geq S_{II}$

Dovendo passare nel Centro C la Tensione principale Media σ_{media} (σ_m) ci consente di Trovare i valori di S_I e S_{II} nel seguente modo :

$$S_I = \sigma_m + R = +50 + 78 = +128 \text{ N/mm}^2$$

ossia $S_I = +128 \text{ N/mm}^2$

mentre :

$$S_{II} = \sigma_m - R = +50 - 78 = -28$$

ossia $S_{II} = -28 \text{ N/mm}^2$

DEF. 2f

è l'inclinazione del Raggio R rispetto all'ascissa e graficamente si determina :

- 1) Partendo dall'ascissa, ruotando goniometricamente in positivo (antiorario) sino ad intersecare il Raggio R (retta CH)
- 2) Partendo dall'ascissa, ruotando goniometricamente in negativo (orario) sino ad intersecare il Raggio R (retta C) in questo caso si determina $-2f$;

In formule :

$$\begin{cases} \tau = R \cdot \sin(2f) \\ \frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2} = R \cdot \cos(2f) \end{cases}$$

⑥

proviamo ad applicare la 1^a

$$\tau = R \cdot \sin(2\gamma) \Rightarrow \sin(2\gamma) = \frac{\tau}{R} \Rightarrow 2\gamma = \arcsin\left(\frac{\tau}{R}\right)$$

cioè: ~~da cui~~ $\arcsin\left(\frac{60}{78}\right) \cong 50^\circ = \beta$

~~da cui~~ in verità questo è β e quindi:
 $2\gamma = 180 - \beta = 180 - 50 = 130$

applichiamo la 2^a equazione:

$$\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2} = R \cdot \cos(2\gamma)\right) \Rightarrow \frac{-\sigma_I}{2} = R \cdot \cos(2\gamma)$$

$$\cos(2\gamma) = \frac{-\sigma_I}{2 \cdot R} \Rightarrow \text{da cui} \quad \text{dove } \sigma_I = +100$$

$$2\gamma = \arccos\left(\frac{-\sigma_I}{2 \cdot R}\right) = \arccos\left(\frac{-100}{2 \cdot 78}\right) \cong 130^\circ$$

$+2\gamma = 130^\circ$ da prendere con rotazione
 antioraria, dall'ascissa
 sino a CH;

mentre

DEF - γ

è l'inclinazione del piano PRINCIPALE su cui agisce la
 TENSIONE PRINCIPALE σ_I rispetto al piano orizzontale PH
 in rosso:

$$\gamma = \frac{2\gamma}{2} = \frac{130}{2} = 65^\circ$$

ma $- \gamma = 65^\circ$ da prendere con rotazione oraria
 dal piano PH al piano di σ_I ;



CENTRO DEL CERCHIO MINIMO

Si come viene fornita la TENSIONE PRINCIPALE $S_{III} = 200 \text{ N/mm}^2$ si deduce che il primo cerchio individuato non è il cerchio massimo, ma sarà il CERCHIO INTERMEDIO, visto che σ_2

~~A~~ $A = +128$ e $D = +200$ passerà il CERCHIO MINIMO;

questi due sono i cerchi interni: all' ARBELO di 70HR che è il Cerchio Massimo di estremità $B = -28$ e $D = +200$;

Per quanto riguarda il CERCHIO MINIMO il suo centro si troverà a metà tra $A = +128$ e $D = +200$, ossia

$$C' = \frac{A + D}{2} = \frac{+128 + 200}{2} = 164$$

$$C' = (+164; 0) \text{ N/mm}$$

CERCHIO MASSIMO

Ora che abbiamo anche l'estremo massimo $D = +200$ il centro del cerchio Massimo si trova facendo la ~~media~~ media tra l'estremo minimo B e l'estremo massimo D , ossia:

$$C'' = \frac{B + D}{2} = \frac{-28 + 200}{2} = +86$$

CENTRO $C'' = (+86; 0) \text{ N/mm}^2$

RAGGIO

$$R_{\text{arbelo}} = +200 - 86 = 114 \Rightarrow R_{\text{arbelo}} = 114 \text{ N/mm}^2$$

8

CRITERIO di TRESCA :

Per verificare se il provino di acciaio resiste alle
TENSIONE di SNERVAMENTO assegnata $\sigma_y = 240 \text{ N/mm}^2$,
verifichiamo che :

$$\sigma_y \equiv \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

dove $\sigma_{\max} = \sigma_{III} = 200 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{II} = -28 \text{ N/mm}^2$$

pertanto • si deduce che :

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_{III} - \sigma_{II} = 200 - (-28) = 200 + 28 = 228$$

ossia $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 228 \text{ N/mm}^2$

e quindi :

$$240 > 228$$

ossia il provino rimane in FASE ELASTICA (reversibile) e non
subisce snervamento ;

si deduce che lo snervamento si realizza se :

$$\sigma_y = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

Graficamente, possiamo verificarlo nel seguente modo :

$$\tau_y = \sigma_y / 2 = R$$

nel nostro caso ~~240~~²²⁸ trattandosi di uno stato
Tensionale generico considero, $\sigma_y = 228 \text{ N/mm}^2$ e quindi

$$\tau_y = \frac{228}{2} = 114 \Rightarrow \tau_y = 114 \text{ N/mm}^2$$

$$H = (0; +60)$$

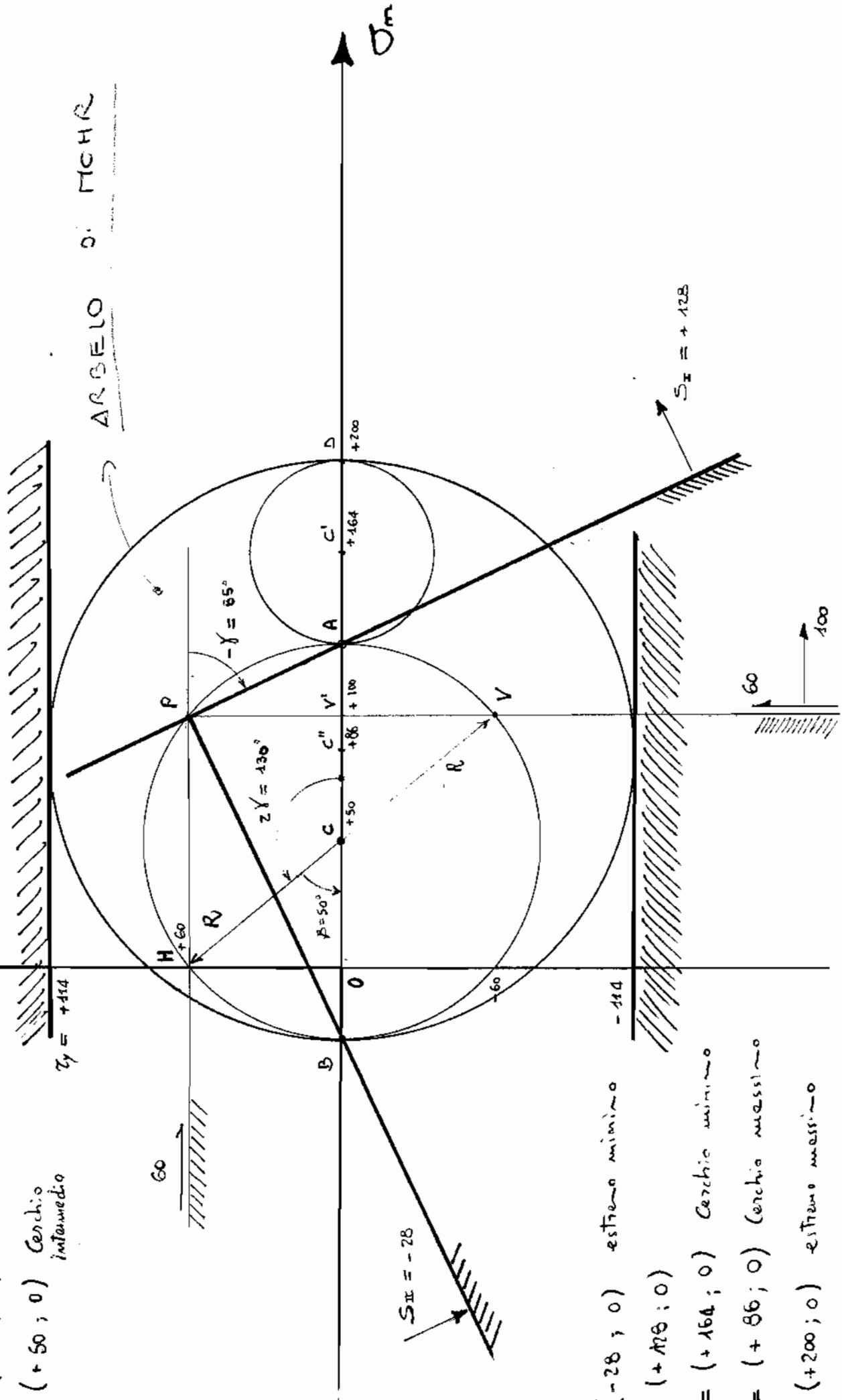
$$V = (+100; -60)$$

$$P = (+100; +60)$$

$$V' = (+100; 0)$$

$$C = (+50; 0) \text{ Cerchio intermedio}$$

ARCHELO D. TCHIR



$$B = (-28; 0) \text{ estremo minimo}$$

$$A = (+100; 0)$$

$$C' = (+164; 0) \text{ Cerchio minimo}$$

$$C'' = (+86; 0) \text{ Cerchio massimo}$$

$$D = (+200; 0) \text{ estremo massimo}$$